## 反転公式とその利用　－完全順列および全射の個数について－

### １．反転公式

$n=0,1,2,3,\cdots$ とするとき，数列 $\{a_n\}$ の $n$ 次階差数列の初項は次のようになる．

（0 次階差数列の初項は　$a_0$）
1 次階差数列の初項は　$a_1-a_0$
2 次階差数列の初項は　$a_2-2a_1+a_0$
3 次階差数列の初項は　$a_3-3a_2+3a_1-a_0$

ここで，初項の作る数列を $\{b_n\}$ とすると，

$$b_n=\sum_{r=0}^{n}(-1)^{n-r}\,{}_nC_r\,a_r$$

が成り立つ．証明略）

またこのとき，

$$a_n=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k\,b_k$$

が成り立つ．（証明略）つまり，

$$a_n=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k\,b_k \iff b_n=\sum_{r=0}^{n}(-1)^{n-r}\,{}_nC_r\,a_r$$

である．

以下では，これを反転公式と呼ぶことにする．

**反転公式**

$$a_n=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k\,b_k \iff b_n=\sum_{r=0}^{n}(-1)^{n-r}\,{}_nC_r\,a_r$$

## ２．完全順列

1～ $n$ までの数字を記入した $n$ 枚のカードと $n$ 個の箱がある．この $n$ 枚のカードを $n$ 個の箱に１枚ずつ入れるとき，カードの番号と箱の番号１組も一致しない順列を，完全順列という．（なぜこのように呼ばれるかは知らない）

以下では，この完全順列の場合の数を $f_n$ として，数列 $\{f_n\}$ が満たす条件を調べ，それをもとに $f_n$ を求める．

上記 $n$ 個の箱に $n$ 枚のカードを入れる順列を考察する．

まず，これら順列は $n!$ 通りある．　　・・・　①

各箱とそれに入っているカードの組は $n$ 組あるが，箱とカードの番号が一致している組と異なっている組がある．いま，$n$ 組のうちの $k$ 組だけの番号が一致している順列の総数は，

$k$ 組だけの番号が一致している順列

＝一致する $k$ 組の選び方×残った $(n-k)$ 組の完全順列

＝ ${}_nC_k\ f_{n-k}$　（ただし，$f_0 = 1$ とする）

であり，①の順列は，これらを $k=0$ から $k=n$ までについて加えたものであるから，

$$n! = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\ f_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_{n-k}\ f_{n-k}$$

ここで，$n-k$ をあらためて $k$ と置き直せば，

$$n! = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\ f_k$$

これに反転公式を適用すると，

$$\begin{aligned} f_n &= \sum_{r=0}^{n} (-1)^{n-r}\, {}_nC_r\, r! \\ &= \sum_{r=0}^{n} (-1)^{n-r} \frac{n!}{(n-r)!} \\ &= n! \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^{n-r}}{(n-r)!} \\ &= n! \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^{r}}{r!} \\ &= n! \left( 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} \right) \end{aligned}$$

## ３．全射の個数

集合 A から集合 B への写像 $f$ について, A の像が B 全体を覆うとき, すなわち $f(\mathrm{A})=\mathrm{B}$ が成り立つときこの写像は全射（surjection）であるという.

いま，非負の整数 $N, n$ に対して，$N$ 個の要素を持つ集合 A から $n$ 個の要素をもつ集合 B への全射の個数を $s_n$ とする.（$N$ は定数とみなす）　また以下では, 集合 A の要素数を $\#(\mathrm{A})$ で表すことにする.

まず，集合 A から集合 B へ全ての写像は $n^N$ 個あるが，これらは，集合 $f(\mathrm{A})$ の要素数で類別することができる. すなわち，$f(\mathrm{A})$ の要素数 $\#\left(f(\mathrm{A})\right)=0$ の場合（これは存在しない），$\#\left(f(\mathrm{A})\right)=1$ の場合，$\#\left(f(\mathrm{A})\right)=2$ の場合，・・・，$\#\left(f(\mathrm{A})\right)=n$ の場合に分けることができる.

そこで，$\#\left(f(\mathrm{A})\right)=k$ の場合について，そのような写像がいくつあるかを調べてみる.

まず，$\mathrm{C}=f(\mathrm{A})$ とおけば，$\#(\mathrm{C})=k$ であるから，写像 $f:\mathrm{A}\to\mathrm{C}$ の個数は $s_k$ である. また，C は集合 B の部分集合で $\#(\mathrm{C})=k$ であるから，このような部分集合の選び方は ${}_nC_k$ 通りある．したがって，$\#\left(f(\mathrm{A})\right)=k$ であるような写像は ${}_nC_k\,s_k$ 個ある.

以上から，次の式を得る.

$$n^N=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k\,s_k$$

これに反転公式を適用すると，

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{r=0}^{n}(-1)^{n-r}\,{}_nC_r\,r^N \\ &= \sum_{r=0}^{n}(-1)^{r}\,{}_nC_r\,(n-r)^N \\ &= n^N-{}_nC_1\,(n-1)^N+{}_nC_2\,(n-2)^N-\cdots+(-1)^{n-1}\,{}_nC_{n-1}\,1^N \end{aligned}$$

### 全射の個数と順列との関係

異なる $n$ 個の文字から $N$ 個を並べる重複順列のうち，どの文字も少なくとも一度は使うような順列は，$N$ 個の場所から $n$ 個の文字への全射と考えることができるから，その総数は上記 $s_n$ であり，

$$s_n=n^N-{}_nC_1\,(n-1)^N+{}_nC_2\,(n-2)^N-\cdots+(-1)^{n-1}\,{}_nC_{n-1}\,1^N$$