2012/12/20

完全順列，全射，円順列の総数

－反転公式および和集合の要素数に関する公式の利用－

友田　勝久

【要　旨】

数列と高次階差数列との間には，「二項係数の反転公式」と呼ばれる，裏返しの関係がある。

$$a_n=\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, b_k \iff b_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\, {}_nC_k\, a_k$$

約数についての総和に関しては，「メビウスの反転公式」と呼ばれる反転公式がある。

$$f(n)=\sum_{d|n} g(d) \iff g(n)=\sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)f(d)$$

また，和集合$\bigcup A_i$の要素の個数に関しても，補集合を考えることにより，反転公式と類似の関係

$$\#\left(A_1{}^c\cap A_2{}^c\cap\cdots\cap A_n{}^c\right)=\#(U)-\sum_i \#(A_i)+\sum_{i<j}\#(A_i\cap A_j)-\cdots+(-1)^n\#(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n)$$

$$\#\left(B(p_1)^c\cap B(p_2)^c\cap\cdots\cap B(p_m)^c\right)=\sum_{d|n}\mu(d)\#\left(B(d)\right)$$

を見出すことができる。第１節では，完全順列の総数や全射の総数について，二項係数の反転公式を利用した求め方を述べる。また第２節では，任意の円順列の総数の求め方を述べる。同じものが含まれる円順列では，多くの場合，その総数の導出が非常に困難である。これを，メビウスの反転公式を利用して導出する。第３節では，集合の要素の個数に関する公式を導き，それを利用して，完全順列の総数や全射の総数を導出する。また，円順列の総数についても，再び触れる。

【キーワード】

反転公式，円順列，完全順列，攪乱順列，全射の総数，和集合の要素数

1　二項係数の反転公式と完全順列および全射の総数について

(1) 二項係数の反転公式

$n=0,1,2,3,\cdots$とするとき，数列$\{a_n\}$のn次階差数列の初項をb_nとおくと，

0 次階差数列の初項は

$$b_0 = a_0$$

1 次階差数列の初項は

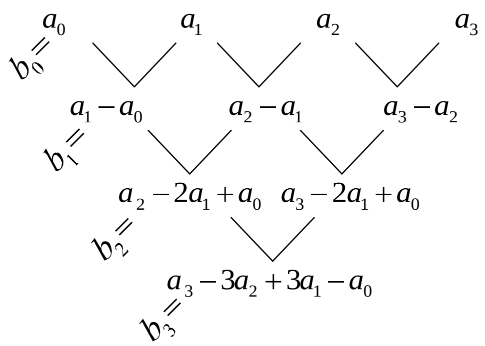
$$b_1 = a_1 - a_0$$

2 次階差数列の初項は

$$b_2 = (a_2 - a_1) - (a_1 - a_0) = a_2 - 2a_1 + a_0$$

3 次階差数列の初項は

$$b_3 = (a_3 - 2a_2 + a_1) - (a_2 - 2a_1 + a_0)$$
$$= a_3 - 3a_2 + 3a_1 - a_0$$

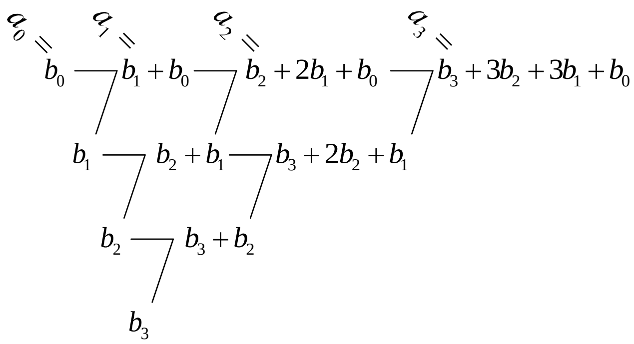


以下同様にして，n 次階差数列の初項は

$$b_n = \sum_{r=0}^{n} (-1)^{n-r} {}_nC_r \, a_r$$

逆に，数列$\{a_n\}$は数列$\{b_n\}$を用いて，

$$a_n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r \, b_r$$



と表される。すなわち，数列$\{a_n\}$と$\{b_n\}$について，

$$a_n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r \, b_r \iff b_n = \sum_{r=0}^{n} (-1)^{n-r} {}_nC_r \, a_r$$

これを，二項係数の反転公式という。

なお，この反転公式の厳密な証明は，このレポートの最後に掲載した。

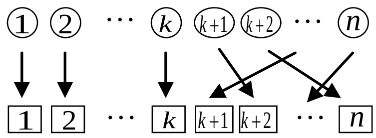
(2) 完全順列の総数

1～n までの数字を記入した n 個の球と n 個の箱がある．この n 個の球を n 個の箱に 1 個ずつ入れるとき，球の番号と箱の番号が 1 組も一致しない順列を，完全順列あるいは攪乱（かくらん）順列という。

以下では，この完全順列の総数を f_n として，数列$\{f_n\}$が満たす条件を調べ， f_n を求める。

n 個の箱に n 個の球を入れる順列一般について考える。これらの総数は $n!$ 通りある。

箱とそれに入っている球の組は n 組あるが，箱と球の番号が一致している組と異なっている組がある。n 組のうちの k 組だけについて番号が一致している順列の個数は，



k 組だけの番号が一致している順列の個数

＝一致する k 組の選び方×残った$(n-k)$組の完全順列の個数

$= {}_nC_k\ f_{n-k}$ （ただし， $f_0 = 1$ とする）

である。これを $k=0$ から n まで加えたものが順列の総数 $n!$ であるから，

$$n! = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\ f_{n-k}$$

ここで，$n-k$ をあらためて k と置き直せば，
…

$$n! = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_{n-k}\ f_k \quad \text{すなわち} \quad n! = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\ f_k$$

これに二項係数の反転公式を適用すると，

$$f_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\ {}_nC_k\, k!$$

$$= n!\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$= n!\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

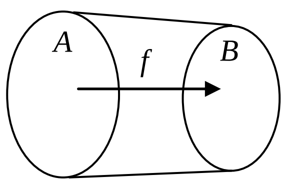
すなわち，完全順列の総数 f_n は，次のようになる。

$$f_n = n!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

補足：よく知られているように，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{f_n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1} \fallingdotseq 0.36787\cdots$ である。$\dfrac{f_n}{n!}$ は完全順列になる確率を表すから，大人数でのクリスマスプレゼント交換会で誰もが他人のプレゼントをもらえる確率は，37%程度だということになる。

(3) 全射の総数

集合 A から集合 B への写像 f について，A の像が B 全体を覆うとき，すなわち $f(A) = B$ が成り立つときこの写像は全射（surjection）であるという。



いま，非負の整数の定数 N と非負の整数の変数 n に対して，N 個の要素を持つ集合 A から n 個の要素をもつ集合 B への全射の総数を s_n とする。また，以下では集合 A の要素数を $\#(A)$ で表す。

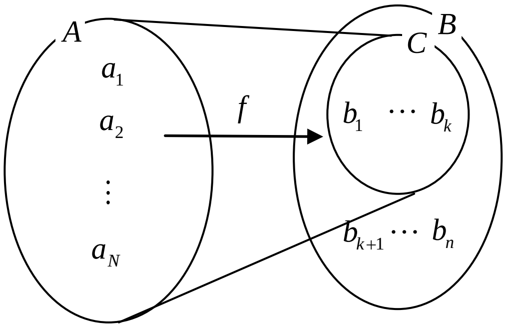
まず，集合 A から集合 B への写像は n^N 個ある。

次に，これらの写像を集合 $f(A)$ の要素数で類別する。すなわち，

$\#\big(f(A)\big) = 0$ の場合，$\#\big(f(A)\big) = 1$ の場合，$\#\big(f(A)\big) = 2$ の場合，・・・，$\#\big(f(A)\big) = n$ の場合に分ける。

整数 k（$0 \leq k \leq n$）に対して，$\#\left(f(A)\right)=k$ を満たす写像の総数を調べてみよう。

$C=f(A)$ とおけば，$\#(C)=k$ であるから，写像 $f:A \to C$ は s_k 個ある。また，C は集合 B の部分集合で，$\#(C)=k$ であるから，このような部分集合の選び方は ${}_nC_k$ 通りある。したがって，$\#\left(f(A)\right)=k$ であるような写像は ${}_nC_k\, s_k$ 個ある。



以上から，次の式を得る。

$$n^N=\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, s_k$$

これに二項係数の反転公式を適用すると，

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\,{}_nC_k\, k^N \\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\,{}_nC_k\,(n-k)^N \end{aligned}$$

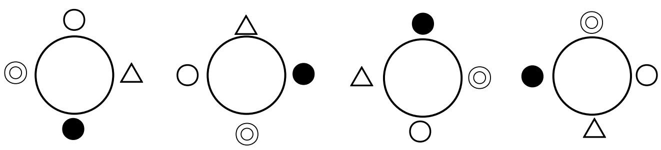
よって，$\#(A)=N$，$\#(B)=n$ であるとき，集合 A から B への全射の総数 s_n は，次のようになる。

$$s_n=n^N-{}_nC_1(n-1)^N+{}_nC_2(n-2)^N-\cdots+(-1)^{n-1}\,{}_nC_{n-1}1^N$$

２　同じものを含む円順列の個数について

(1) 円順列

円順列とは，n 個のものを円周上に等間隔に並べたとき，回転によって一致するものを同一視した順列のことである。



通常の順列では，これら順列は区別されるが，円順列では同一視される。

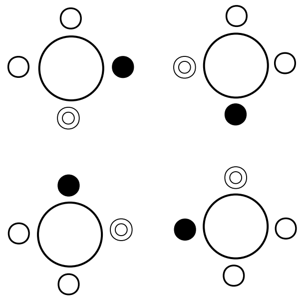
n 個の異なるものが作る円順列の総数は，次のようにして求められる。

n 個の異なるものを n 個の場所に並べる方法は $n!$ 通りある。この順列の中には回転すると一致するものが n 個ずつ含まれているから，円順列の総数は，$\dfrac{n!}{n}=(n-1)!$ である。

(2) 同じものを含む円順列

異なるものからなる円順列の総数は簡単に求まるが，同じものを含む場合は，どうだろうか。

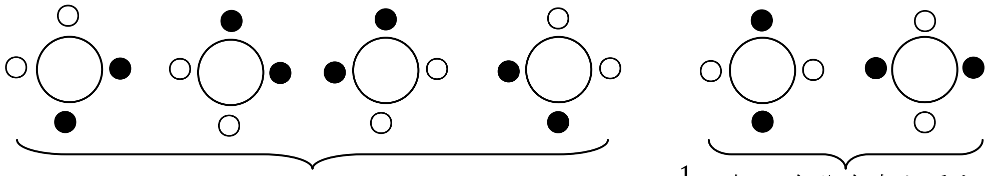
(a) **最初の例として，○○◎●による円順列を考える。**



○○◎●による順列は $\dfrac{4!}{2!\ 1!\ 1!}=12$ 通りあり，回転して重なるものが 4 通りずつあるから，円順列の総数は，$\dfrac{12}{4}=3$ である。

(b) **次に，○○●●による円順列を考えてみよう。**

○○●●による順列は $\dfrac{4!}{2!\ 2!}=6$ 通りある。回転して重なるものが 4 通りずつあれば都合がよいのだが，6 は 4 の倍数ではないからこれはあり得ない。6 通りの内訳は次のようになる。



1 回転で初めて自分自身と重なる　　$\dfrac{1}{2}$回転で自分自身と重なる

最初の 4 通りは，$\dfrac{1}{4}$（90°）ずつ回転して 1 回転するまでのものであるから，これら 4 通りの順列は同一視できる。それに対して，残りの 2 通りは，$\dfrac{1}{2}$回転で自分自身と重なってしまうから，同一視できる順列は 2 個しかない。求め方は次のようになる。

○○●●の 4 個による順列は　　$\dfrac{4!}{2!\,2!}=6$ 通り

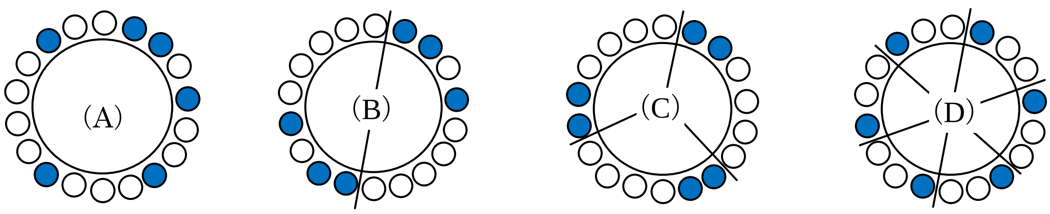
180°回転で重なる順列は，○●1 個ずつによる順列を 2 個並べたものであるから

$$\frac{2!}{1!\,1!}=2 \text{ 通り}$$

よって，求める円順列は　　$\dfrac{6-2}{4}+\dfrac{2}{2}=2$ 通り

(c) **それでは，6 個の●と 12 個の○が作る円順列はどうだろうか？**

この場合は，もっと複雑になる。6 と 12 の公約数は 1, 2, 3, 6 だから，次の 4 通りの場合を考慮する必要がある。



1 回転で初めて重なる　$\dfrac{1}{2}$回転で初めて重なる　$\dfrac{1}{3}$回転で初めて重なる　$\dfrac{1}{6}$回転で初めて重なる

(A) 1 回転（360°回転）で初めて自分自身と重なるもの

(B) $\dfrac{1}{2}$回転で初めて自分自身と重なるもの

（C）$\dfrac{1}{3}$回転で初めて自分自身と重なるもの

（D）$\dfrac{1}{6}$回転で初めて自分自身と重なるもの

この場合，円順列の総数を求める計算は次のようになる。

（D）は，●1 個と○2 個の順列を考えればよいから，

$$\frac{3!}{1!\,2!}=3,\ \text{回転を考慮して}\ 3\times\frac{1}{3}=1\ \text{通り}$$

（C）は，●2 個と○4 個の順列から（D）の個数を除いて，

$$\frac{6!}{2!\,4!}-3=12,\ \text{回転を考慮して}\ 12\times\frac{1}{6}=2\ \text{通り}$$

（B）は，●3 個と○6 個の順列から（D）の個数を除いて，

$$\frac{9!}{3!\,6!}-3=81,\ \text{回転を考慮して}\ 81\times\frac{1}{9}=9\ \text{通り}$$

（A）は，全順列から，（B）（C）（D）の個数を除いて，

$$\frac{18!}{6!\,12!}-81-12-3=3078\quad \text{回転を考慮して}\ 3078\times\frac{1}{18}=1026\ \text{通り}$$

これより，求める円順列は，$1+2+9+1026=1038$ 通り

(3) 既約な円順列

円順列のうち，1 回転して初めて自分自身と重なるものを既約な円順列と呼ぶことにする。

（例） 上記（A）は既約であるが，（B）（C）（D）は既約でない。

既約でない円順列のは，既約な円順列に分解することができる。

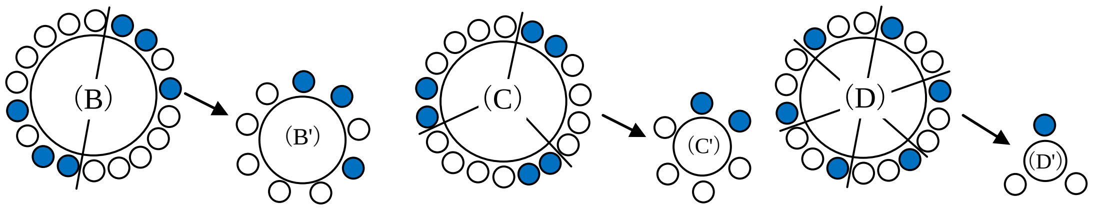
例えば，上記（B）の場合，$\dfrac{1}{2}$回転で初めて自分自身と重なるから，（B）の順列を半分にしてこれを円形に並べた順列（B'）を作ると，この順列は 1 回転するまで自分自身と重ならない。

すなわち，

（B）は，●3 個と○6 個の既約な円順列（B'）と 1 対 1 に対応する。

（C）は，●2 個と○4 個の既約な円順列（C'）と 1 対 1 に対応する。

（D）は，●1 個と○2 個の既約な円順列（D'）と 1 対 1 に対応する。



よって，既約な円順列（A）（B'）（C'）（D'）の個数をそれぞれ，p_1, p_2, p_3, p_6 とすると，

$$\text{円順列の総数}=\sum_{k|6}p_k = p_1+p_2+p_3+p_6=1026+9+2+1=1038$$

(4) 同じものを含む円順列についての一般的考察

ここでは，円順列の総数について，まず一般的な性質を導き，その後，反転公式を用いて総数を求める。

(a) 記号の定義

$S_1, S_2, \cdots, S_m$ の m 種類の球がそれぞれ $n_1, n_2, \cdots, n_m$ 個で合計 N 個あるとき，これら N 個の球が作る順列の総数を $F(n_1, \cdots, n_m)$ ，円順列の総数を $f(n_1, \cdots, n_m)$ ，これら円順列のうち，既約な円順列の個数を $p(n_1, \cdots, n_m)$ ， $\frac{1}{k}$ 回転して初めて自分自身と重なるものの個数を $q_k(n_1, \cdots, n_m)$ とする。

(b) 基本性質

$l = GCM(n_1, \cdots, n_m)$， $r \mid l$ （r が l の約数）とするとき，次式が成り立つ。

（ⅰ） $f(n_1, \cdots, n_m) = \sum_{r|l} q_r(n_1, \cdots, n_m)$ （$\sum_{r|l}$ は，l の約数 r についての総和）

（ⅱ） $F(n_1, \cdots, n_m) = N \sum_{r|l} \frac{1}{r} q_r(n_1, \cdots, n_m)$

（ⅲ） $q_r(n_1, \cdots, n_m) = p\left(\frac{n_1}{r}, \cdots, \frac{n_m}{r}\right)$

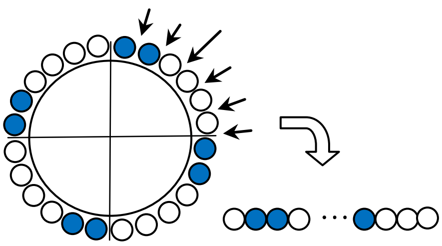
(補足) $F(n_1, \cdots, n_m) = \dfrac{N!}{n_1!\, n_2! \cdots n_m!}$

（ⅰは明らか）

（ⅱの証明）

長さ N の円順列の 1 箇所を切り開いて 1 つの順列を作る方法は，この円順列が $\frac{1}{r}$ 回転して初めて自分自身と重なるときには $\frac{N}{r}$ 通りある。よって，

$$F(n_1, \cdots, n_m) = N \sum_{r|l} \frac{1}{r} q_r(n_1, \cdots, n_m)$$

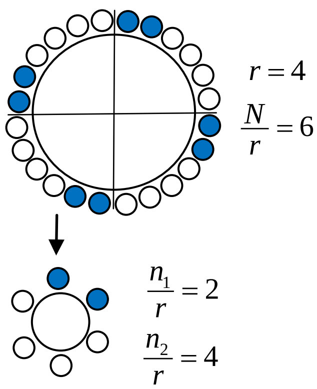


切り開き方は $\frac{N}{r} = \frac{24}{4} = 6$ 通りある

（ⅲの証明）

円順列が $\frac{1}{r}$ 回転で自分自身と重なるということは，この輪を r 個の同じ長さの順列に分けると，それらは全て同じ順列である。この順列の長さは $\frac{N}{r}$ であり，これを輪にすると小さな円順列ができる。この小円順列には，球 $S_1, S_2, \cdots, S_m$ が $\frac{n_1}{r}, \cdots, \frac{n_m}{r}$ 個ずつ含まれている。また，もとの円順列が $\frac{1}{r}$ 回転で<u>初めて</u>自分自身と重なるということから，この小円順列は既約である。したがって，このような小円順列の総数は

$n_1 = 8,\ n_2 = 16,\ N = 24$
$l = GCM(8,16) = 8$



$p\left(\dfrac{n_1}{r}, \cdots, \dfrac{n_m}{r}\right)$ である。

(c) メビウスの反転公式

次の関数 $\mu(n)$ をメビウス関数という。

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 \quad (n=1) \\ (-1)^m \ (n\text{が異なる}m\text{個の素数の積}) \\ 0 \quad (n\text{が素数の平方で割り切れる}) \end{cases}$$

例： $24 = 2^3 \cdot 3 = 2^2 \cdot (2 \cdot 3)$ より $\mu(24) = 0$

$35 = 3 \cdot 5$ より $\mu(35) = (-1)^3 = -1$

（メビウスの反転公式）

自然数に対して定義された関数 $f(n)$, $g(n)$ について,

$$\text{(2-3-c)} \quad f(n) = \sum_{d|n} g(d) \Leftrightarrow g(n) = \sum_{d|n} f(d) \mu\left(\frac{n}{d}\right)$$

が成り立つ。これについての詳しい記述は，参考文献をご覧いただきたい。

また，次の関数 $\varphi(n)$ をオイラー関数という。

$\varphi(n) =$（n 以下で n と互いに素な自然数の個数）

例：p が素数のとき $\varphi(p) = p - 1$

6 以下で 6 と互いに素な自然数は 1 と 5 だけであるから $\varphi(6) = 2$

いま，n 以下の自然数で，n との最大公約数が k のものを $r\,k$ と表せば，$r \leq \dfrac{n}{k}$ であり，r と $\dfrac{n}{k}$ は互いに素であるから，このような自然数は $\varphi\left(\dfrac{n}{k}\right)$ 個ある。よって，

$$n = \sum_{k|n} \varphi\left(\frac{n}{k}\right) = \sum_{d|n} \varphi(d)$$

これにメビウスの反転公式（2-3-c）を適用して，

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} d\,\mu\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{k|n} \frac{n}{k} \mu(k)$$

よってオイラー関数とメビウス関数の間には，下記の関係が成り立つ。

$$\text{(2-3-c')} \quad \frac{\varphi(n)}{n} = \sum_{k|n} \frac{\mu(k)}{k}$$

(d) 円順列の総数の計算

基本性質（ⅰ），（ⅱ），（ⅲ）において，

$$n_1=a_1 l\,,n_2=a_2 l,\ \cdots\ ,n_m=a_m l\,,\quad A=a_1+a_2+\cdots+a_m=\frac{N}{l}\,,\quad r=\frac{l}{k}$$

と置き換えることで，次の３式を得る。

（ｉ'） $f(a_1 l\,,\cdots,a_m l)=\sum_{k|l} q_{\frac{l}{k}}(a_1 l\,,\cdots,a_m l)$

（ⅱ'） $F(a_1 l\,,\cdots,a_m l)=A\sum_{k|l} k\,q_{\frac{l}{k}}(a_1 l\,,\cdots,a_m l)$

（ⅲ'） $q_{\frac{l}{k}}(a_1 l\,,\cdots,a_m l)=p(a_1 k\,,\cdots,a_m k)$

ここから q を消去して，次の２式を得る。

（ⅳ） $f(a_1 l\,,\cdots,a_m l)=\sum_{k|l} p(a_1 k\,,\cdots,a_m k)$

（ｖ） $F(a_1 l\,,\cdots,a_m l)=A\sum_{k|l} k\,p(a_1 k\,,\cdots,a_m k)$

$a_1,a_2,\cdots,a_m$ を定数とみれば，任意の自然数 k に対して， $f(a_1 k\,,\cdots,a_m k)$， $p(a_1 k\,,\cdots,a_m k)$， $F(a_1 k\,,\cdots,a_m k)$ はいずれも自然数 k だけの関数であるから，簡略のために，

$$f(k)=f(a_1 k\,,\cdots,a_m k)$$
$$p(k)=p(a_1 k\,,\cdots,a_m k)$$
$$F(k)=F(a_1 k\,,\cdots,a_m k)$$

とおくと，次のようになる。

（ⅳ'） $f(l)=\sum_{k|l} p(k)$

（ｖ'） $\dfrac{F(l)}{A}=\sum_{k|l} k\,p(k)$

式(ｖ')は，任意の自然数 l に対して成立するから，メビウスの反転公式（2-3-c）を用いて，

$$l\,p(l)=\frac{1}{A}\sum_{k|l}F(k)\mu\left(\frac{l}{k}\right)\qquad \text{すなわち}\qquad p(k)=\frac{1}{Ak}\sum_{d|k}F(d)\mu\left(\frac{k}{d}\right)$$

を得る。これを(ⅳ')に代入して，

$$\begin{aligned}
f(l)&=\sum_{k|l}\left\{\frac{1}{Ak}\sum_{d|k}F(d)\mu\left(\frac{k}{d}\right)\right\}\\
&=\frac{1}{A}\sum_{d|l}\left\{F(d)\sum_{k(d|k|l)}\frac{1}{k}\mu\left(\frac{k}{d}\right)\right\}\\
&=\frac{1}{A}\sum_{d|l}\left\{F(d)\sum_{j|\frac{l}{d}}\frac{1}{dj}\mu(j)\right\}\\
&=\frac{1}{A}\sum_{d|l}\left\{\frac{F(d)}{d}\sum_{j|\frac{l}{d}}\frac{\mu(j)}{j}\right\}
\end{aligned}$$

> $\sum_{k(d|k|l)}$ は，d の倍数であり，l の約数であるような k についての総和

ここで，オイラー関数とメビウス関数についての関係式（2-3-c'）を上式に適用して，

$$f(l)=\frac{1}{A}\sum_{d|l}\frac{F(d)}{d}\frac{\varphi\left(l/d\right)}{l/d}=\frac{1}{Al}\sum_{d|l}\varphi\left(\frac{l}{d}\right)F(d)$$

すなわち，

$$f(a_1 l,\cdots,a_m l)=\frac{1}{Al}\sum_{d|l}\varphi\left(\frac{l}{d}\right)F(a_1 d,a_2 d,\cdots,a_m d)$$

ここに，$F(n_1,\cdots,n_m)$ は，m 種類の球（S_1 が n_1 個，S_2 が n_2 個，…，S_m が n_m 個）が作る順列の

総数であったから，$F(n_1,\cdots,n_m)=\dfrac{(n_1+n_2+\cdots+n_m)!}{n_1!\,n_2!\cdots n_m!}$ である。

以上の考察から．円順列の総数に関する次の結論を得る。

$GCM(a_1,a_2,\cdots,a_m)=1$ のとき，$A=a_1+a_2+\cdots+a_m$ とおくと，

$$f(a_1 l,\cdots,a_m l)=\frac{1}{Al}\sum_{d|l}\varphi\left(\frac{l}{d}\right)\frac{(Ad)!}{(a_1 d)!(a_2 d)!\cdots(a_m d)!}$$

なお，$a_1 l=n_1,\cdots,a_m l=n_m$，$Al=N$ であったから，$k=\dfrac{l}{d}$ とおくと，次のようになる。

$$f(n_1,\cdots,n_m)=\frac{1}{N}\sum_{k|l}\varphi(k)F\left(\frac{n_1}{k},\frac{n_2}{k},\cdots,\frac{n_m}{k}\right)\qquad(l=GCM(n_1,\cdots,n_m))$$

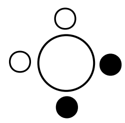
すなわち，

$$f(n_1,\cdots,n_m)=\frac{1}{N}\sum_{k|l}\varphi(k)\frac{\left(\frac{N}{k}\right)!}{\left(\frac{n_1}{k}\right)!\left(\frac{n_2}{k}\right)!\cdots\left(\frac{n_m}{k}\right)!}\qquad(l=GCM(n_1,\cdots,n_m))$$

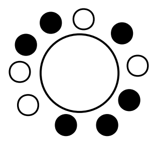
（ただし，$l=GCM(n_1,\cdots,n_m)$，$N=n_1+n_2+\cdots+n_m$）

(5) 計算例

$$\begin{aligned}f(2,2)&=\frac{1}{4}\sum_{k|2}\varphi(k)F\left(\frac{2}{k},\frac{2}{k}\right)\\&=\frac{1}{4}\left\{\varphi(1)F(2,3)+\varphi(2)F(1,1)\right\}\\&=\frac{1}{4}\left\{1\cdot\frac{4!}{2!\,2!}+1\cdot\frac{2!}{1!1!}\right\}\\&=2\end{aligned}$$

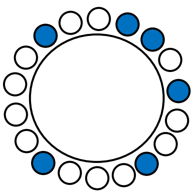


$$\begin{aligned}f(4,6)&=\frac{1}{10}\sum_{k|2}\varphi(k)F\left(\frac{4}{k},\frac{6}{k}\right)\\&=\frac{1}{10}\left\{\varphi(1)F(4,6)+\varphi(2)F(2,3)\right\}\end{aligned}$$

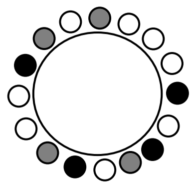


$$= \frac{1}{10}\left\{1\cdot\frac{10!}{4!\,6!}+1\cdot\frac{5!}{2!\,3!}\right\}$$
$$= 22$$

$$f(12,6)=\frac{1}{18}\sum_{k|6}\varphi(k)F\left(\frac{12}{k},\frac{6}{k}\right)$$
$$=\frac{1}{18}\{\varphi(1)F(12,6)+\varphi(2)F(6,3)+\varphi(3)F(4,2)+\varphi(6)F(2,1)\}$$
$$=\frac{1}{18}\left\{1\cdot\frac{18!}{12!\,6!}+1\cdot\frac{9!}{6!\,3!}+2\cdot\frac{6!}{4!\,2!}+2\cdot\frac{3!}{2!\,1!}\right\}$$
$$=1038$$



$$f(8,4,4)=\frac{1}{16}\sum_{k|4}\varphi(k)F\left(\frac{8}{k},\frac{4}{k},\frac{4}{k}\right)$$
$$=\frac{1}{16}\{\varphi(1)F(8,4,4)+\varphi(2)F(4,2,2)+\varphi(4)F(2,1,1)\}$$
$$=\frac{1}{16}\left\{1\cdot\frac{16!}{8!\,4!\,4!}+1\cdot\frac{8!}{4!\,2!\,2!}+2\cdot\frac{4!}{2!\,1!\,1!}\right\}$$
$$=56334$$

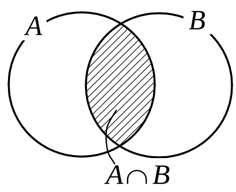


３　和集合の要素数と完全順列，全射，既約な円順列の総数について

(1) 集合の重なりと要素の個数の関係

以下では，集合はすべて有限集合であるとする。

(a) $A\cup B$ の要素の個数

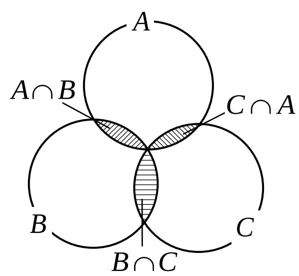


２つの集合の要素の個数に関しては，次の公式がよく知られている。

$$\#(A\cup B)=\#(A)+\#(B)-\#(A\cap B)$$

これは，$\#(A)$ と $\#(B)$ の和から，重なった部分の個数 $\#(A\cap B)$ を取り除くということである。

(b) $A\cup B\cup C$ の要素の個数



まず，$A\cap B\cap C=\varnothing$ のときは，２個の集合の場合と同様に，$\#(A)+\#(B)+\#(C)$ から重なった部分を取り除いて，

$$\#(A\cup B\cup C)=\#(A)+\#(B)+\#(C)$$
$$-\{\#(A\cap B)+\#(B\cap C)+\#(C\cap A)\}$$

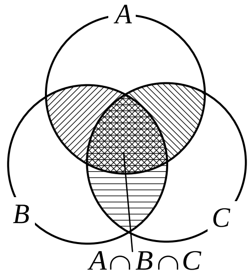
次に，$A \cap B \cap C \neq \varnothing$ の場合，上記等式から共通部分 $A \cap B \cap C$ の要素数だけを補正すればよい。

$A \cap B \cap C$ の要素は，

$\#(A)+\#(B)+\#(C)$ の部分で3回

$-\{\#(A \cap B)+\#(B \cap C)+\#(C \cap A)\}$ の部分で -3 回

数えられているから，差し引き 0 回となる。これより次式を得る。



$$\begin{aligned}\#(A \cup B \cup C) &= \#(A)+\#(B)+\#(C)\\ &\quad -\{\#(A \cap B)+\#(B \cap C)+\#(C \cap A)\}\\ &\quad +\#(A \cap B \cap C)\end{aligned}$$

(c) 共通部分の要素の個数

(a)や(b)の結果の右辺は，恒等式

$$(1-a)(1-b)=1-(a+b)+ab$$

$$(1-a)(1-b)(1-c)=1-(a+b+c)+(ab+bc+ca)-abc$$

と似ている。そこで，この形を意識して変形してみよう。

全体集合を U とおいて(a)を少し変形すると，次の式を得る。

$$\#(U)-\#(A \cup B)=\#(U)-\{\#(A)+\#(B)\}+\#(A \cap B)$$

ここで，$U \setminus (A \cup B)=(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ （ただし，$P \setminus Q = P \cap Q^c$ ）であるから，

$$\#(A^c \cap B^c)=\#(U)-\{\#(A)+\#(B)\}+\#(A \cap B)$$

同様に，(b)の結果は次のように変形できる。

$$\begin{aligned}&\#(A^c \cap B^c \cap C^c)\\ &=\#(U)-\{\#(A)+\#(B)+\#(C)\}+\{\#(A \cap B)+\#(B \cap C)+\#(C \cap A)\}-\#(A \cap B \cap C)\end{aligned}$$

(d) 一般の場合

n 個の集合の場合，次の関係が成り立つ。

(3-1-d)　$\#\left(A_1{}^c \cap A_2{}^c \cap \cdots \cap A_n{}^c\right)$

$$=\#(U)-\sum_{i}\#(A_i)+\sum_{i<j}\#(A_i \cap A_j)-\sum_{i<j<k}\#(A_i \cap A_j \cap A_k)+\cdots+(-1)^n\#(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$$

（ここで，$\sum\limits_{i<j}$ とは $i<j$ を満たすすべての組 $(\,i\,,\,j\,)$ に関する和であり，

$\sum\limits_{i<j<k}$ とは $i<j<k$ を満たすすべての組 $(\,i\,,\,j\,,\,k\,)$ に関する和を表すものとする）

これの証明は，このレポートの最後に掲載した。

(2) 完全順列の総数

n 個の要素からなる完全順列は， $A=\{1, 2, 3, \cdots, n\}$ として，単射 $f: A \to A$ の中で，任意の i（$1 \le i \le n$）について $f(i) \ne i$ を満たすものとして考えることができる。そこで，

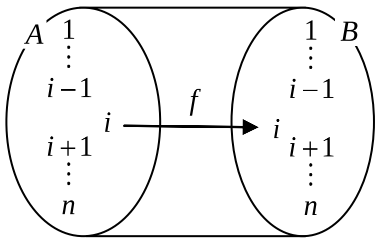
全体集合 U を，単射 $f: A \to A$ の全体

$F_i = \{ f \mid f(i) = i \}$

と定めると，

$F_i^c = \{ f \mid f(i) \ne i \}$

より，完全順列の全体は， $F_1^c \cap F_2^c \cap \cdots \cap F_n^c$ で表される。これの総数を p_n とおくと，公式（3-1-d）より，



［このような f の全体を F_i とおく］

$$p_n = \#(U) - \sum_i \#(F_i) + \sum_{i<j} \#(F_i \cap F_j) - \cdots + (-1)^n \#(F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n)$$

ここで，

$\#(U) = n!$

$\#(F_i) = (n-1)!$

$i \ne j$ のとき， $\#(F_i \cap F_j) = (n-2)!$

（例えば， $\#(F_1 \cap F_2)$ は， $f(1)=1,\ f(2)=2$ であるから $\{3, 4, \cdots, n\}$ から $\{3, 4, \cdots, n\}$ への単射の個数と一致する。）

・・・

$\#(F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n) = 1\ (= (n-n)!)$

より，

$$\begin{aligned} p_n &= n! - {}_nC_1 (n-1)! + {}_nC_2 (n-2)! - \cdots + (-1)^n {}_nC_n (n-n)! \\ &= n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{n!}{n!} \\ &= n! \left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right) \end{aligned}$$

(3) 全射の総数

有限集合 A, B において, $\#(A)=N$, $\#(B)=n$ とし, A から B への全射の総数を $s(N,n)$ とおく。また， $B=\{b_1,\ b_2, \cdots, b_n\}$ とする。

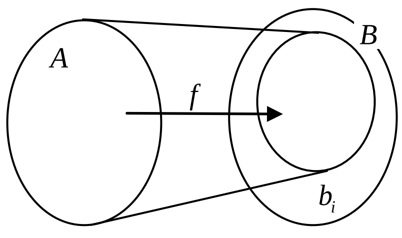
このとき，

全体集合 U を A から B への写像の全体

$F_i = \{ f \mid b_i \notin f(A) \}$

と定めると，

$F_i^c = \{ f \mid b_i \in f(A) \}$



［このような f の全体を F_i とおく］

であるから，全射の全体は， $F_1{}^c \cap F_2{}^c \cap \cdots \cap F_n{}^c$ で表される。
よって，公式（3-1-d）より，

$$s(N,n) = \#(U) - \sum_i \#(F_i) + \sum_{i<j} \#(F_i \cap F_j) - \cdots + (-1)^n \#(F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n)$$

ここで，

$\#(U) = n^N$

$\#(F_i) = (n-1)^N$

$i \neq j$ のとき， $\#(F_i \cap F_j) = (n-2)^N$

（例えば， $\#(F_1 \cap F_2)$ は，A から $\{b_3, b_4, \cdots, b_n\}$ への写像の個数である。）

・・・

$\#(F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n) = (n-n)^N \quad (=0)$

よって，

$$s(N,n) = n^N - {}_nC_1(n-1)^N + {}_nC_2(n-2)^N - \cdots + (-1)^n {}_nC_n(n-n)^N$$

(4) 乗法的集合関数と要素の個数

集合を値にもつ関数 $f(n)$ が

m, n が互いに素であるとき， $f(m) \cap f(n) = f(mn)$

を満たすとき，この関数は乗法的であると定める。

いま, 自然数 n の素因数を $p_1, p_2, \cdots, p_m$ とし, n の任意の約数に d 対して定義された集合 $B(d)$ が，d の関数として乗法的であり，また， $B(1) = U$ （全体集合）であるとする。

このとき，公式（3-1-d）より，

$$\begin{aligned}
&\#\left(B(p_1)^c \cap B(p_2)^c \cap \cdots \cap B(p_m)^c\right) \\
&= \#(U) - \sum_i \#\left(B(p_i)\right) + \sum_{i<j} \#\left(B(p_i) \cap B(p_j)\right) - \cdots + (-1)^m \#(B(p_1) \cap B(p_2) \cap \cdots \cap B(p_m)) \\
&= \#\left(B(1)\right) - \sum_i \#\left(B(p_i)\right) + \sum_{i<j} \#\left(B(p_i p_j)\right) - \cdots + (-1)^m \#\left(B(p_1 p_2 \cdots p_m)\right) \\
&= \sum_{d|n} \mu(d) \#\left(B(d)\right)
\end{aligned}$$

ここに， $\mu(n)$ はメビウス関数である。すなわち，

（3-4）　集合 $B(d)$ が乗法的 且つ $B(1) = U$ であるとき，

$$\#\left(B(p_1)^c \cap B(p_2)^c \cap \cdots \cap B(p_m)^c\right) = \sum_{d|n} \mu(d) \#\left(B(d)\right)$$

（ただし， $p_1, p_2, \cdots, p_m$ は，n の素因数）

(5) オイラー関数の値

オイラー関数 $\varphi(n)=$（n 以下で n と互いに素な自然数の個数）について，
自然数 n の素因数を $p_1, p_2, \cdots, p_m$ とおく。このとき，

全体集合を $U=\{1, 2, \cdots, n\}$
n の約数 d に対して，$B(d)$ を n 以下の自然数で d の倍数の全体

と定めると，n 以下で n と互いに素な自然数の全体は，$B(p_1)^c\cap B(p_2)^c\cap\cdots\cap B(p_m)^c$ と一致するから，

$$\varphi(n)=\#\left(B(p_1)^c\cap B(p_2)^c\cap\cdots\cap B(p_m)^c\right)$$

また，$B(d)$ は d の関数として乗法的，且つ $B(1)=U$ であるから，公式（3-4）より，

$$\#\left(B(p_1)^c\cap B(p_2)^c\cap\cdots\cap B(p_m)^c\right)=\sum_{d|n}\mu(d)\#\left(B(d)\right)=\sum_{d|n}\mu(d)\frac{n}{d}$$

よって，

$$\varphi(n)=n\sum_{d|n}\frac{\mu(d)}{d}$$

なお，

$$\sum_{d|n}\mu(d)\frac{n}{d}=n-\sum_{i}\frac{n}{p_i}+\sum_{i<j}\frac{n}{p_ip_j}-\cdots+(-1)^m\frac{n}{p_1p_2\cdots p_m}$$

より

$$\varphi(n)=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_m}\right)$$

(6) 既約な円順列の総数

$S_1, S_2, \cdots, S_m$ の m 種類の球がそれぞれ $n_1, n_2, \cdots, n_m$ 個で合計 N 個ある。このとき，

N 個の球が円形に並んで作る順列（円順列ではない）の全体を全体集合 U
$\dfrac{1}{k}$ 回転して自分自身と重なる（「初めて重なる」ではない）順列の全体を $B(k)$

とする。また，$n_1, n_2, \cdots, n_m$ の GCM を l，l の素因数を $p_1, p_2, \cdots, p_m$ とする。

このとき，既約な円順列の総数 $p(n_1, \cdots, n_m)$ は，

$$p(n_1, \cdots, n_m)=\frac{1}{N}\#\left(B(p_1)^c\cap B(p_2)^c\cap\cdots\cap B(p_m)^c\right)$$

であり，また，$B(k)$ は k の関数として乗法的，且つ $B(1)=U$ であるから，公式（3-4）より，

$$\begin{aligned}\#\left(B(p_1)^c\cap B(p_2)^c\cap\cdots\cap B(p_m)^c\right)&=\sum_{d|l}\mu(d)\#\left(B(d)\right)\\&=\sum_{d|l}\mu(d)\frac{\left(\frac{N}{d}\right)!}{\left(\frac{n_1}{d}\right)!\left(\frac{n_2}{d}\right)!\cdots\left(\frac{n_m}{d}\right)!}\end{aligned}$$

よって，

$$p(n_1,\cdots,n_m)=\frac{1}{N}\sum_{d|l}\mu(d)\frac{\left(\frac{N}{d}\right)!}{\left(\frac{n_1}{d}\right)!\left(\frac{n_2}{d}\right)!\cdots\left(\frac{n_m}{d}\right)!}$$

４　補足

(1) 二項係数の反転公式の証明

$$a_n=\sum_{r=0}^{n}{}_nC_r\,b_r \iff b_n=\sum_{r=0}^{n}(-1)^{n-r}{}_nC_r\,a_r$$

（$\Rightarrow$ の証明）

$a_n=\sum_{r=0}^{n}{}_nC_r\,b_r$ を書き並べると，

$$\begin{aligned}
&(0)\quad a_0={}_0C_0\,b_0\\
&(1)\quad a_1={}_1C_0\,b_0+{}_1C_1\,b_1\\
&(2)\quad a_2={}_2C_0\,b_0+{}_2C_1\,b_1+{}_2C_2\,b_2\\
&\qquad\qquad\cdot\ \cdot\ \cdot\\
&(r)\quad a_r={}_rC_0\,b_0+{}_rC_1\,b_1+{}_rC_2\,b_2+\cdots+{}_rC_r\,b_r\\
&\qquad\qquad\cdot\ \cdot\ \cdot\\
&(n)\quad a_n={}_nC_0\,b_0+{}_nC_1\,b_1+{}_nC_2\,b_2+\cdots+{}_nC_k\,b_k+\cdots+{}_nC_n\,b_n
\end{aligned}$$

ここで，$(0)\times{}_nC_0-(1)\times{}_nC_1+(2)\times{}_nC_2-\cdots+(-1)^n(n)\times{}_nC_n$ を計算すると，

左辺　$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k{}_nC_k\,a_k$

以下右辺

b_0 の係数　$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k{}_nC_k\,{}_kC_0=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k{}_nC_k=(1-1)^n=0$

b_1 の係数

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(-1)^k{}_nC_k\,{}_kC_1&=-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}n\,{}_{n-1}C_{k-1}\\
&=-n\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i{}_{n-1}C_i\\
&=-n(1-1)^{n-1}\\
&=0
\end{aligned}$$

一般に $r<n$ のとき，

b_r の係数 $$\sum_{k=r}^{n}(-1)^k {}_nC_k\, {}_kC_r = (-1)^r \sum_{k=r}^{n}(-1)^{k-r} {}_nC_r\, {}_{n-r}C_{k-r}$$

$$= (-1)^r {}_nC_r \sum_{i=0}^{n-r}(-1)^i {}_{n-r}C_i$$
$$= (-1)^r {}_nC_r (1-1)^{n-r}$$
$$= 0$$

b_n の係数 $$(-1)^n {}_nC_n\, {}_nC_n = (-1)^n$$

以上から， $$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k {}_nC_k\, a_k = (-1)^n b_n$$

よって， $$a_n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r\, b_r \Rightarrow b_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k} {}_nC_k\, a_k \quad \cdots \text{(A)}$$

（$\Leftarrow$ の証明）

上記（A）で，$(-1)^k a_k$ を a_k，$(-1)^k b_k$ を b_k と置きなおせばよい。

(2) 公式（3-1-d）の証明

$$\#\left(A_1{}^c \cap A_2{}^c \cap \cdots \cap A_n{}^c\right)$$
$$= \#(U) - \sum_i \#(A_i) + \sum_{i<j}\#(A_i \cap A_j) - \sum_{i<j<k}\#(A_i \cap A_j \cap A_k) + \cdots + (-1)^n \#(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$$

これは次のように確かめることができる。

任意の要素 $a \in U$ について，右辺に何回数えられているかを調べると，

a が $A_1{}^c \cap A_2{}^c \cap \cdots \cap A_n{}^c$ に属するとき，すなわち，任意の i について $a \notin A_i$ のとき，

$1-0+0-0+\cdots+0=1$ （回）

ある自然数 $i\ (1 \le i \le n)$ について，a が A_i だけに属するとき，

$1-1+0-0+\cdots+0=0$ （回）

ある自然数 $i, j\ (1 \le i < j \le n)$ について，a が $A_i \cap A_j$ だけに属するとき，

$1-2+1-0+\cdots+0=0$ （回）

ある自然数 $i, j, k\ \ (1 \le i < j < k \le n)$ について，a が $A_i \cap A_j \cap A_k$ だけに属するとき，

$1-3+3-1+0-\cdots+0=0$ （回）

・・・

a が $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ に属するとき，

${}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - {}_nC_3 + \cdots + (-1)^n {}_nC_n = (1-1)^n = 0$ （回）

以上から，公式（3-1-d）が成り立つことがわかる。

(3) 公式（3-1-d）についての若干の補足

公式（3‐1‐d）

$$
\begin{aligned}
&\#\left(A_1^{\,c}\cap A_2^{\,c}\cap\cdots\cap A_n^{\,c}\right)\\
&=\#(U)-\sum_i\#(A_i)+\sum_{i<j}\#(A_i\cap A_j)-\sum_{i<j<k}\#(A_i\cap A_j\cap A_k)+\cdots+(-1)^n\#(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n)
\end{aligned}
$$

については，恒等式

$$
(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)=1-\sum_i a_i+\sum_{i<j}a_ia_j-\sum_{i<j<k}a_ia_ja_k+\cdots+(-1)^n a_1a_2\cdots a_n
$$

との類似を見ることができる。これに関しては，

$$
A_1^{\,c}\cap A_2^{\,c}\cap\cdots\cap A_n^{\,c}=(U\setminus A_1)\cap(U\setminus A_2)\cap\cdots\cap(U\setminus A_n)\qquad\text{（ただし，}P\setminus Q=P\cap\bar{Q}\text{）}
$$

との関係から説明できるのではないかと考えているが，結論には至っていない。

なお，公式（3‐1‐d）において，各集合 A_i を補集合 $A_i^{\,c}$ と置き換えることによって，次の等式を得る。

$$
\begin{aligned}
&\#\left(A_1^{\,c}\cup A_2^{\,c}\cup\cdots\cup A_n^{\,c}\right)\\
&=\#(U)-\sum_i\#(A_i)+\sum_{i<j}\#(A_i\cup A_j)-\sum_{i<j<k}\#(A_i\cup A_j\cup A_k)+\cdots+(-1)^n\#(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)
\end{aligned}
$$

参考文献

「数学研究」http://www.osaka-kyoiku.ac.jp/~tomodak/report/　より，

「完全順列および全射の個数－反転公式の利用－」　友田勝久

「同じものが含まれる円順列の総数」　友田勝久

「初等整数論講義」高木貞治