じゃんけんの確率

n 人が一斉にじゃんけんをして，負けたものは外れ，勝者だけが残る。これを繰り返してたった１人が勝ち残るまで続けるとき。何回じゃんけんすることになるかの平均回数を求めてみよう。

［Ⅰ］n 人が１回のじゃんけんをするとき k 人だけが勝ち残る確率

n 人が１回のじゃんけんをするとき，k 人だけが残る確率を $P(n,\ k)$（ただし $0<k<n$ ）とする。また，あいこのときには n 人全員が残るので，その確率を $P(n, n)$とする。

いま，n 人がじゃんけんをするとき，k 人だけがチョキで勝ち残る場合を考えてみよう。このとき，残り $n-k$ 人はパーであるから，このような場合の数は，

$${}_nC_k$$

である。

単に k 人が勝つといった場合，パー，チョキ，グーの３通りの勝ち方があるので，n 人がじゃんけんをするとき k 人だけが勝ち残る確率は，

$$P(n,k)=\frac{3\,{}_nC_k}{3^n}=\frac{{}_nC_k}{3^{n-1}}$$

ただし，これは $k<n$ の場合である。ここで，

$$\sum_{k=1}^{n}P(n,k)=1$$

であるから，$k=n$ すなわち「あいこ」の場合の確率は，

$$P(n,n)=1-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{{}_nC_k}{3^{n-1}}=1-\frac{3(2^n-2)}{3^n}=1-\frac{2^n-2}{3^{n-1}}$$

［Ⅱ］n 人がじゃんけんをするとき，１人だけが勝ち残るまでの回数についての確率

n 人がじゃんけんをするとき，

１人だけが勝ち残るまでの回数が r 回である確率を $Q(n,r)$

とする。ただし，

$$Q(n,0)=\begin{cases}0 & (n>1)\\ 1 & (n=1)\end{cases}$$

と定める。このとき，

$$\sum_{r=0}^{\infty}Q(n,r)=1$$

が成り立つ。次に，$P(n, k)$と $Q(n, k)$の関係であるが，最初の１回のじゃんけんの結果，何人が残るかで分けて考えることで，

$$Q(n,r)=\sum_{k=1}^{n}P(n,k)Q(k,r-1)$$

を得る。

［Ⅲ］n 人がじゃんけんをするとき，１人だけが勝ち残るまでの平均回数

n 人がじゃんけんをするとき，１人だけが勝ち残るまでの平均回数を f_n とすると，

$$
\begin{aligned}
f_n &= \sum_{r=1}^{\infty} r\,Q(n,r) \\
&= \sum_{r=1}^{\infty} r \sum_{k=1}^{n} P(n,k)Q(k,r-1) \\
&= \sum_{k=1}^{n} P(n,k) \sum_{r=1}^{\infty} r\,Q(k,r-1) \\
&= \sum_{k=1}^{n} P(n,k) \sum_{t=0}^{\infty} (1+t)\,Q(k,t) \\
&= \sum_{k=1}^{n} P(n,k) \sum_{t=0}^{\infty} Q(k,t) + \sum_{k=1}^{n} P(n,k) \sum_{t=0}^{\infty} t\,Q(k,t) \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} P(n,k) \sum_{t=1}^{\infty} t\,Q(k,t) \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} P(n,k)\, f_k
\end{aligned}
$$

この式の右辺は，最初の１回のじゃんけんの結果，何人が残るかで分けて，平均を求める式を表している。

ところで，この式の右辺は f_n が含まれているので，もう少し変形しよう。

$$f_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} P(n,k)\, f_k + P(n,n)\, f_n$$

より，

$$\{1 - P(n,n)\}\, f_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} P(n,k)\, f_k$$

$$\left\{ \sum_{k=1}^{n-1} P(n,k) \right\} f_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} P(n,k)\, f_k$$

$$f_n = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n-1} P(n,k)} + \frac{\sum_{k=1}^{n-1} P(n,k)\, f_k}{\sum_{k=1}^{n-1} P(n,k)}$$

ここに，［Ⅰ］の結果を代入すると，

$$f_n = \frac{3^{n-1}}{2^n - 2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{{}_nC_k}{2^n - 2}\, f_k \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

［Ⅳ］n 人がじゃんけんをするとき，１人だけが勝ち残るまでの回数の分散

n 人がじゃんけんをするとき，１人だけが勝ち残るまでの回数の

２乗の平均を g_n，分散を h_n

とすると，

$$\begin{aligned} g_n - 2f_n + 1 &= \sum_{r=1}^{\infty} r^2 Q(n,r) - 2\sum_{r=1}^{\infty} r\,Q(n,r) + 1 \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} (r-1)^2 Q(n,r) \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} (r-1)^2 \sum_{k=1}^{n} P(n,k)Q(k,r-1) \\ &= \sum_{k=1}^{n} P(n,k) \sum_{r=1}^{\infty} (r-1)^2 Q(k,r-1) \\ &= \sum_{k=1}^{n} P(n,k) \sum_{t=0}^{\infty} t^2 Q(k,t) \\ &= \sum_{k=1}^{n} P(n,k)\, g_k \end{aligned}$$

これより，

$$g_n = \sum_{k=1}^{n} P(n,k)\, g_k + 2f_n - 1$$

ここで，［Ⅲ］の後半と同様の変形を行うと，

$$g_n = \frac{3^{n-1}}{2^n - 2}(2f_n - 1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{{}_nC_k}{2^n - 2} g_k \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

また，分散は，

$$h_n = g_n - f_n{}^2$$

である。

なお，分散については，

$$h_n = \sum_{k=1}^{n} P(n,k) h_k + \sum_{k=1}^{n} P(n,k)\, f_k{}^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} P(n,k)\, f_k \right)^2$$

が成り立つことを記しておく。

①および②をもとに計算した，平均や標準偏差（分散の平方根）を資料１として掲載しておく。

［Ｖ］平均 f_n の評価

式①から，

$$(2^n-2)\,f_n = 3^{n-1}+\sum_{k=1}^{n-1}{}_nC_k\ f_k = 3^{n-1}+\sum_{k=1}^{n}{}_nC_k\ f_k - f_n$$

ここで，f_0 を任意に定めれば，

$$2^n\,f_n = 3^{n-1}+\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k\ f_k + f_n - f_0$$

したがって，

$$f_n = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^n + \sum_{k=0}^{n}\frac{{}_nC_k}{2^n}\,f_k + \frac{f_n}{2^n} - \frac{f_0}{2^n}$$

$$\cong \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^n + \sum_{k=0}^{n}\frac{{}_nC_k}{2^n}\,f_k + \frac{f_n}{2^n} \qquad \cdot\cdot\cdot\cdot ③$$

ここで，

$$f_n = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^n + p_n$$

とおくと，

$$\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^n + p_n \cong \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^n + \sum_{k=0}^{n}\frac{{}_nC_k}{2^n}\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^k + p_k\right\} + \frac{1}{2^n}\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^n + p_n\right\}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^n + \frac{1}{3\cdot 2^n}\left(1+\frac{3}{2}\right)^n + \sum_{k=0}^{n}\frac{{}_nC_k}{2^n}\,p_k + \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{p_n}{2^n}$$

これより，

$$p_n = \frac{1}{3}\left\{\left(\frac{5}{4}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n\right\} + \sum_{k=0}^{n}\frac{{}_nC_k}{2^n}\,p_k + \frac{p_n}{2^n}$$

$$\cong \frac{1}{3}\left(\frac{5}{4}\right)^n + \sum_{k=0}^{n}\frac{{}_nC_k}{2^n}\,p_k + \frac{p_n}{2^n}$$

この式は，③と同じ形をしているので，

$$p_n = \frac{1}{3}\left(\frac{5}{4}\right)^n + q_n$$

とおけば，

$$q_n \cong \frac{1}{3}\left(\frac{9}{8}\right)^n + \sum_{k=0}^{n}\frac{{}_nC_k}{2^n}\,q_k + \frac{q_n}{2^n}$$

このように，次々に近似していくことによって，

$$f_n \cong \frac{1}{3}\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^n + \left(\frac{5}{4}\right)^n + \left(\frac{9}{8}\right)^n + \left(\frac{17}{16}\right)^n\right\}$$

を得る。ただし，この近似を繰り返せば，近似の際の丸め誤差が積み重なるので，発散する。この式による近似の様子を，資料２として掲載した。

［資料１］　式①および②をから求めた値

人数	平均	標準偏差
2	1.5	0.9
3	2.3	1.3
4	3.2	1.8
5	4.5	2.6
6	6.2	3.9
7	8.6	5.8
8	12.1	8.6
9	17.1	12.9
10	24.3	19.3
11	35.0	29.0
12	50.6	43.5
13	73.7	65.1
14	108.0	97.6
15	158.9	146.4
16	234.6	219.4
17	347.4	329.0
18	515.7	493.3
19	767.1	739.7
20	1142.9	1109.3
21	1704.9	1663.6
22	2545.9	2495.0
23	3804.8	3742.2
24	5690.2	5612.8
25	8514.4	8418.6
26	12745.9	12627.3

人数	平均	標準偏差
27	19087.3	18940.3
28	28592.1	28409.7
29	42840.3	42613.8
30	64201.2	63919.7
31	96228.7	95878.5
32	144252.4	143816.5
33	216266.2	215723.5
34	324259.9	323583.9
35	486216.7	485374.2
36	729109.9	728059.6
37	1093397.2	1092087.4
38	1639762.8	1638129.0
39	2459229.6	2457191.2
40	3688328.1	3685784.3
41	5531848.7	5528673.7
42	8296970.9	8293007.5
43	12444456.3	12439507.8
44	18665437.2	18659258.1
45	27996599.7	27988883.1
46	41992957.9	41983320.3
47	62987013.6	62974975.7
48	94477495.5	94462458.4
49	141712466.9	141693681.8
50	212563985.1	212540516.6

［資料２］平均の近似の様子

近似式

$$f_n \cong \frac{1}{3}\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^n+\left(\frac{5}{4}\right)^n+\left(\frac{9}{8}\right)^n+\left(\frac{17}{16}\right)^n\right\}$$

による近似の様子を下に示す。ここに，

１次誤差＝ $f_n-\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^n$ ，２次誤差＝１次誤差 $-\frac{1}{3}\left(\frac{5}{4}\right)^n$ ，・・・

人数	平 均 f_n	１次誤差	２次誤差	３次誤差	４次誤差
2	1.5	0.8	0.2	-0.2	-0.6
3	2.3	1.1	0.5	-0.0	-0.4
4	3.2	1.5	0.7	0.2	-0.2
5	4.5	2.0	0.9	0.3	-0.1
6	6.2	2.4	1.2	0.5	-0.0
7	8.6	3.0	1.4	0.6	0.1
8	12.1	3.6	1.6	0.7	0.2
9	17.1	4.3	1.8	0.8	0.3
10	24.3	5.1	2.0	0.9	0.3
11	35.0	6.1	2.3	1.0	0.4
12	50.6	7.4	2.5	1.2	0.5
13	73.7	8.9	2.8	1.3	0.5
14	108.0	10.7	3.1	1.4	0.6
15	158.9	12.9	3.4	1.5	0.7
16	234.6	15.6	3.8	1.6	0.7
17	347.4	19.0	4.2	1.7	0.8
18	515.7	23.1	4.6	1.8	0.8
19	767.1	28.2	5.1	1.9	0.9
20	1142.9	34.5	5.6	2.1	0.9
25	8514.4	97.3	9.1	2.7	1.2
30	64201.2	284.2	15.0	3.5	1.5
35	486216.7	846.9	25.1	4.6	1.8
40	3688328.1	2550.6	42.9	5.8	2.1
45	27996599.7	7727.3	74.3	7.5	2.4
50	212563985.1	23485.0	130.0	9.7	2.8