

正六角形はいくつあるか

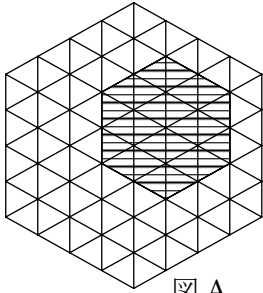


図 A

1 辺の長さが 4 の正六角形（以下、大六角形）の中にある正六角形（大小いろいろあるが、まとめて小六角形ということにする）の個数はいくつあるでしょう。

ノーマルな方法としては、大六角形の大きさに注目して数学的帰納法を用いるものがありますが、ここでは、六角形が立方体に見えることを利用して求めてみます。

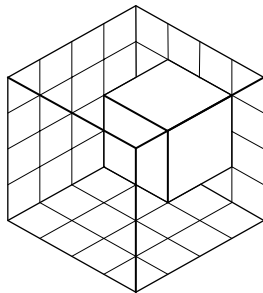


図 B

図 A では、辺の長さが 2 の小六角形が大六角形の中にあります。これの背景を工夫したのが図 B です。

図 B では、大立方体の中に小立方体が浮かんでいるように見えます。しかし、これでは小立方体が手前にあるのか向こうにあるのかわかりません。そこで、

「小立方体は大立方体の内部にあり、向こう側 3 面の何れか少なくとも 1 つで接している」と定めます。これが図 C および図 D です。

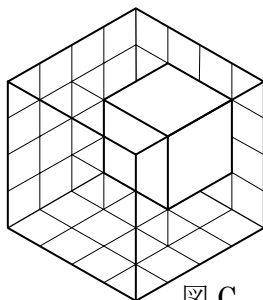


図 C

さて、図 D において、小立方体の頂点のうち最も手前にあるものを P とします。点 P は大立方体の中に浮かんでいます。ここから、小立方体の各辺を消し去ったものが図 E です。

図 E から図 D に戻るには、点 P から 3 つの座標平面に下した垂線のうちもっとも短いものを 1 辺として立方体を描きます。

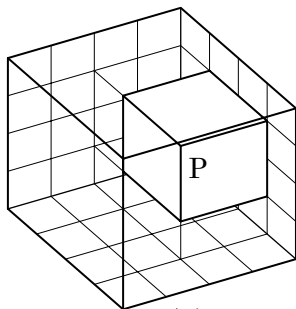


図 D

このようにして、図 A の大六角形の中にある小六角形と、図 D や図 E の大立方体の中に浮かぶ点 P の間には 1 対 1 の対応がつけます。

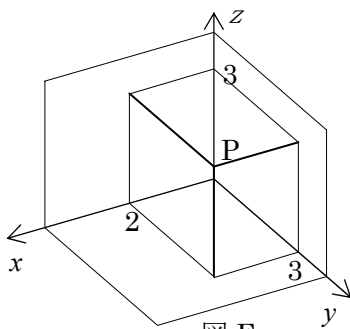


図 E

さて、図 E において、点 P の座標を (x, y, z) とすると、

$$1 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq 4, 1 \leq z \leq 4$$

が成り立ちます。もちろん、 x, y, z は整数です。このことから、点 P が存在する位置は $4 \times 4 \times 4 = 64$ 通りあることがわかります。

したがって、大六角形の中に小六角形は 64 個あります。