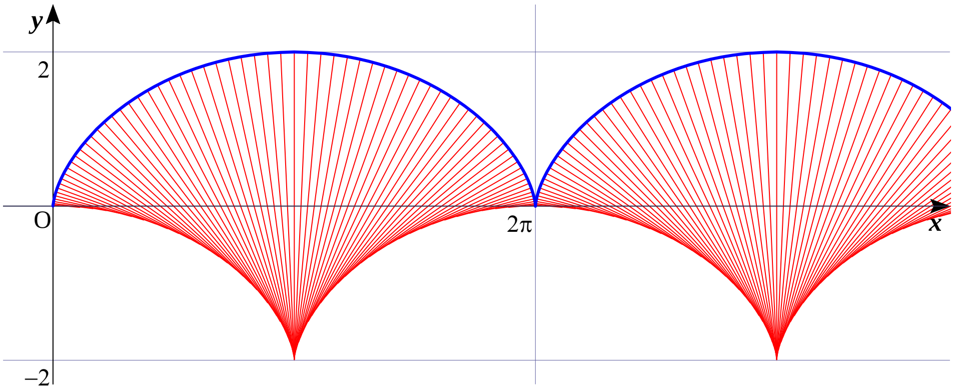
2009/1/31（2009/2/9 修正）

# サイクロイドの縮閉線と弧長について

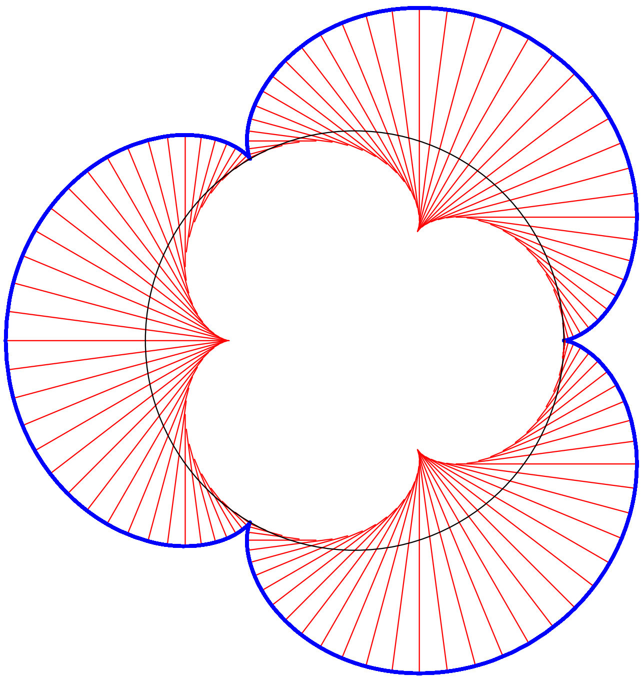
友田 勝久

曲線の縮閉線というのは，曲線上の各点における曲率円の中心の軌跡のことであり，これは，曲線の法線の包絡線と一致する。[注1]

サイクロイドの縮閉線を法線の包絡線として描いてみたのが下図であるが，縮閉線はもとのサイクロイドと同じ大きさのサイクロイドになっている。

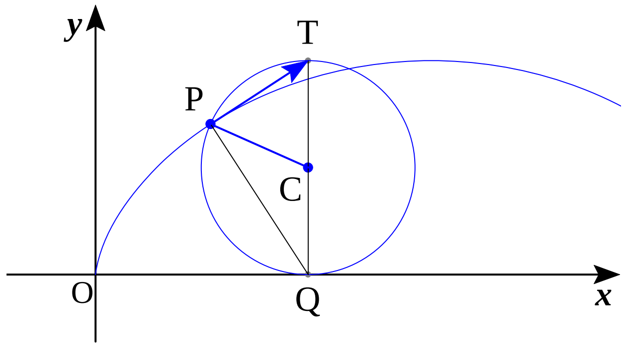



次に，外サイクロイドについても法線の包絡線を描いてみると，縮閉線は，元の曲線と相似な曲線になっている。



以下では，これらのサイクロイドの縮閉線に関する性質を微積分の力を借りずに導いてみる。
また，この事実を元に，サイクロイドの弧長を求めてみる。

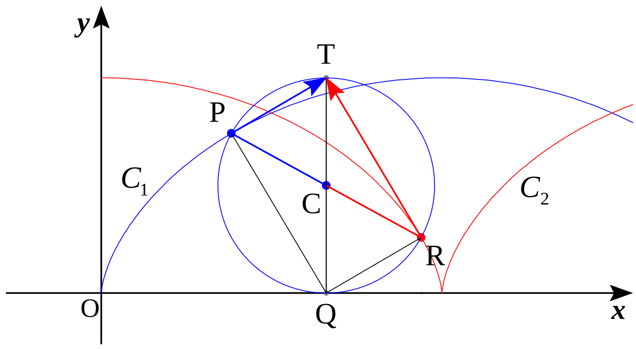
## サイクロイドの接線の性質




　サイクロイドは転がる円（サイクロイドの生成円という）の周上の点の軌跡である。この点を P とする。

　転がる円の接地点を Q とすれば，各瞬間において点 Q は静止しているから，円盤は全体として点 Q を中心とする円運動をしていることになる。したがって，点 P の運動の方向，すなわち点 P の接線方向は，線分 PQ と垂直である。したがって，接線は円の最上点 T を通る。注2

## サイクロイドの接線と法線

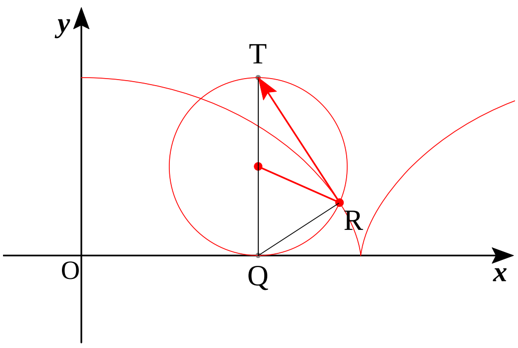


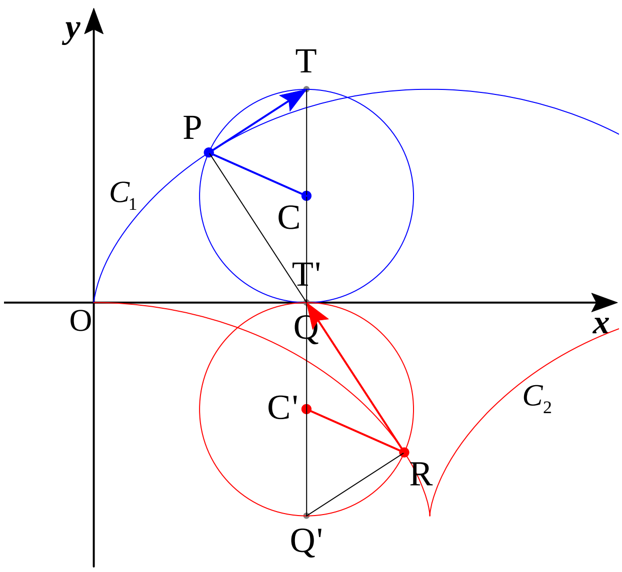

　ここで, 円周上の直径の両端にある 2 点の運動について調べてみよう。

　まず, これらの 2 点は同じ大きさのサイクロイドを描く。これを $C_1$， $C_2$ とする。

　直径上の円周角の性質から，QP と QR は直交するから，四角形 TPQR は長方形となる。

　下図は，点 R に関する部分だけを取り出したものである。



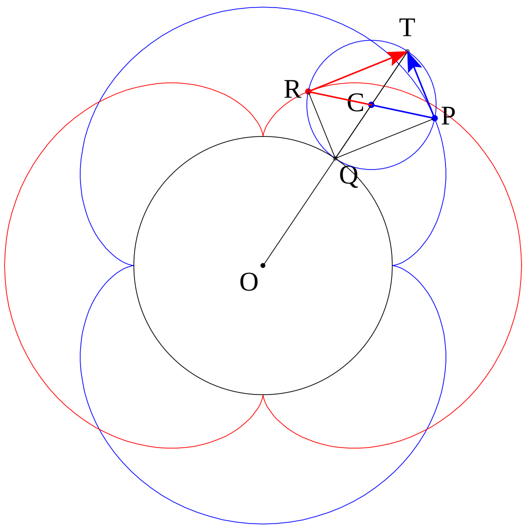

これを, 下方に円の直径分だけ平行移動したものが右図である。そうすると，3 点 P, Q, R は一直線上に並ぶから，点 P におけるサイクロイド $C_1$ の接線と点 R におけるサイクロイド $C_2$ の接線は直交する。

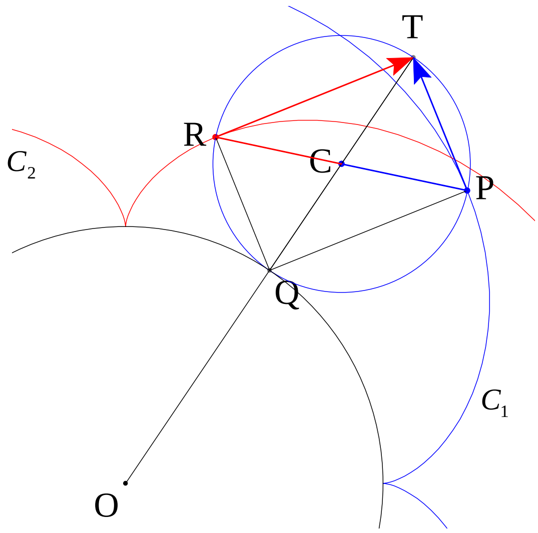
　このことから，サイクロイド $C_1$ の法線の包絡線はサイクロイド $C_2$ であることがわかる。

### 外サイクロイドの接線と法線

次に，外サイクロイドについて，もとの曲線と縮閉線の関係を調べてみる。以下では，定円の半径を 1，生成円の半径を $a$ とする。

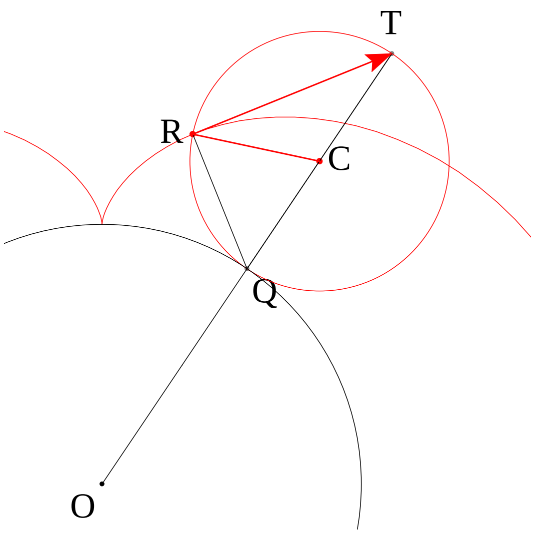
下左図は生成円の半径 $a=\dfrac{1}{2}$ の外サイクロイドであるが，これの一部を拡大したのが下右図である。

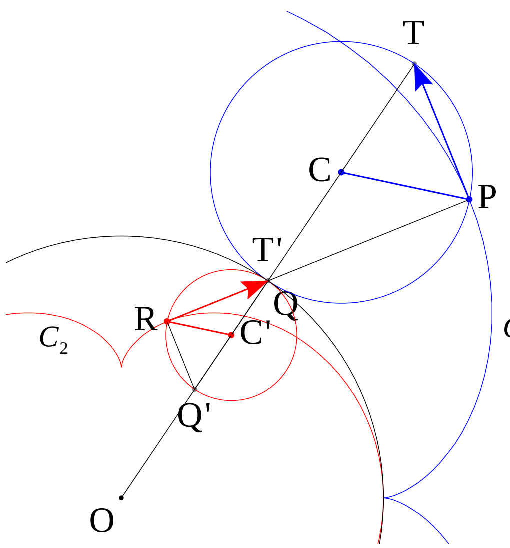



2 点 P, R は直径の両端にあり，同じ大きさの外サイクロイドを描く。これを $C_1$，$C_2$ とする。

下左図は，点 R に関する部分だけを取り出したものである。これを，定円の中心 O に向かって縮小し，点 T がちょうど定円上に来るようにすると，生成円は定円に接する。そのときの図が右下図である。縮小しても平行や垂直といった性質は保たれるから，3 点 P, Q, R は一直線上に並び，点 P における外サイクロイド $C_1$ の接線と点 R における外サイクロイド $C_2$ の接線は直交する。



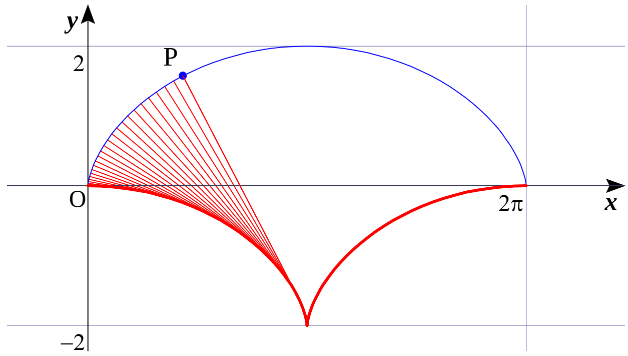

このことから，外サイクロイド $C_1$ の法線の包絡線はこれと相似な外サイクロイドであることがわかる。

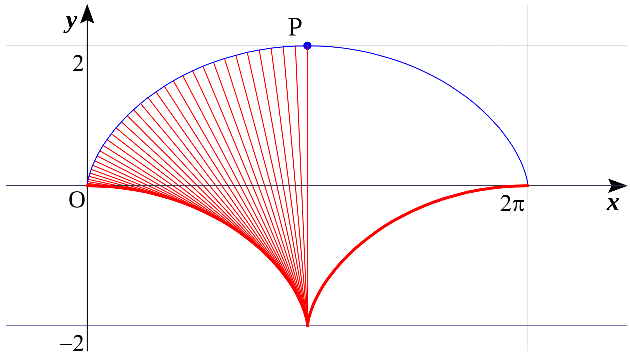
ちなみに，このときの相似比は，$(1+2a):1$ である。また，これら 2 つの外サイクロイドは，元が同じ生成円の直径の両端の点が描いたものだから，山と谷が逆になっている。

## サイクロイドの伸開線と弧長

サイクロイドの縮閉線はサイクロイドであるから，サイクロイドの伸開線もまたサイクロイドである。すなわち，縮閉線であるサイクロイドに糸を巻きつけておいて，その端点を糸がたるまないように引っ張っていけば，元のサイクロイドを得る。 これを用いてサイクロイドの弧長を求めることができる。

上の説明からわかるように，糸の長さがサイクロイドの弧長である。糸の端点 P が右図の位置 $(\pi,2)$ にあるとき，糸の長さは 4 であるから，サイクロイドの弧長はその 2 倍の 8 である。すなわち，サイクロイドの弧長は生成円の直径の 4 倍である。




## カージオイドの弧長

サイクロイドと同様の方法でカージオイドなど外サイクロイドの弧長を求めることができる。

定円の半径を 1 とすれば，カージオイドの場合，生成円の半径は $a=1$ であるから，元の曲線と縮閉線の相似比は $(1+2a):1=3:1$ である。

右下図において，糸の端点 P が左端の位置 $(-3,0)$ にあるときの糸の長さを（右上図を参考にして）求めると，

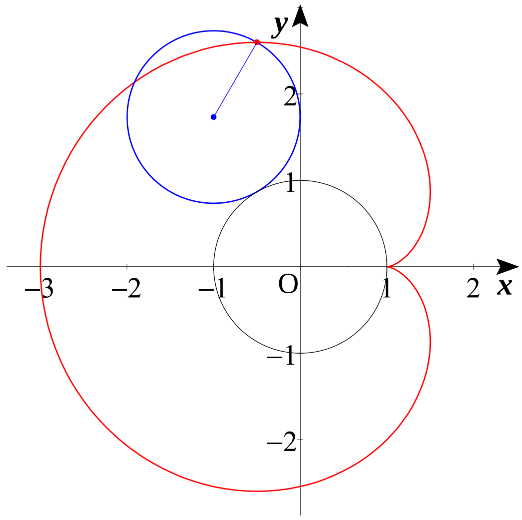
$$3-\frac{1}{3}=\frac{8}{3}$$

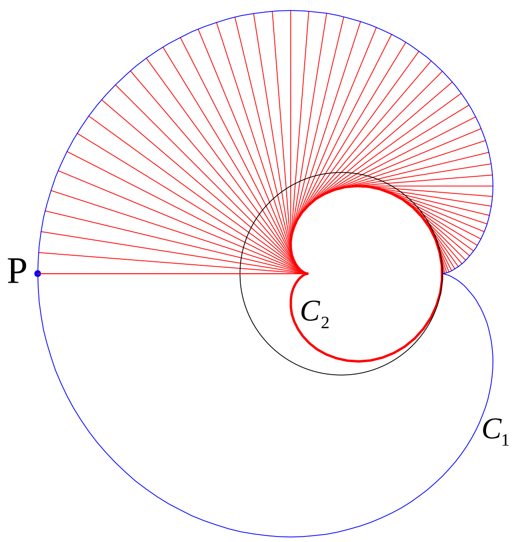
であるから，カージオイド $C_2$ の全長は $\frac{16}{3}$ である。

ところで，カージオイド $C_1$ の生成円の半径は 1 であり，カージオイド $C_2$ は，$C_1$ を $\frac{1}{3}$ 倍したものであるから，生成円の半径が 1 のカージオイドの全弧長は，

$$\frac{16}{3}\times 3=16$$

である。すなわち，生成円の直径の 8 倍に等しい。



### 内サイクロイドについて

サイクロイドと外サイクロイドについて調べてきたが，内サイクロイドについても同様の性質が成り立つ。定円の半径 1，生成円の半径 $a$ の内サイクロイドの場合，元の曲線と縮閉線は相似であり，相似比は $(1-2a):1$ である。

詳しい説明は省略する。

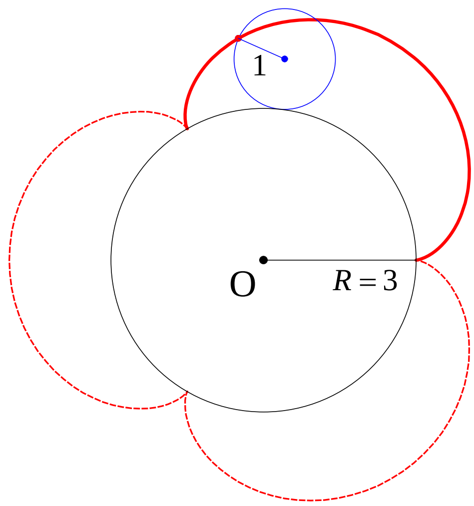
### サイクロイドの弧長と外サイクロイドの弧長

生成円の半径を 1 とするとき，サイクロイドの弧長は 8 で，カージオイドの弧長はそれの 2 倍になっている。これは偶然だろうか。他の外サイクロイドに関しても弧長を調べてみると，次のようになる。

半径 $R$ の定円の周りを，半径 1 の生成円が 1 回転するときの弧長は $8\left(1+\frac{1}{R}\right)$

カージオイドの場合 $R=1$ だから，弧長は $8(1+1)=16$。

右図のように $R=3$ なら，生成円が 1 回転するとき，定円の周りを $\frac{1}{3}$ 周する（太い実線部分）。この部分の弧長は $8\left(1+\frac{1}{3}\right)=\frac{32}{3}$ である。




サイクロイドと比べて外サイクロイドでは，生成円が 1 回転する間（すなわち，生成円上の点が定円に接してから再び接するまでの間）に弧長がちょうど $\frac{8}{R}$ 増える。

「外サイクロイドの弧長は，サイクロイドにおいて同じだけ生成円が回転したときの弧長の $1+\frac{1}{R}$ 倍である。」

生成円が $R$ 回転すると定円の周りをちょうど 1 周するから，このときの弧長はちょうど 8 増える。

「半径 1 の円が転がりながら大円の周りを 1 周すると，直線上を同じ距離だけ進む場合に比べて，弧長は 8 増える」

以下は，このことについての考察である。

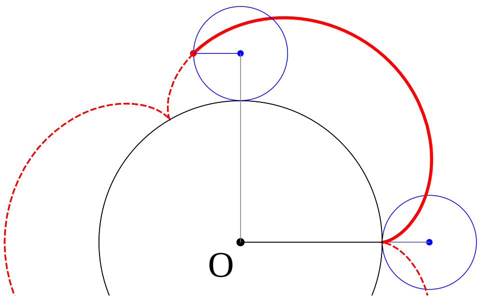
### 自転角＝回転角＋公転角

サイクロイドも外サイクロイドも転がる円上の点の軌跡であるが，外サイクロイドの場合，生成円は定円の周りを回る，すなわち「公転」していることが異なる。外サイクロイドの生成円には公転による回転運動が加わっているのである。

そこで，生成円の回転角を，定円の中心から見た回転角と，静止した観測者から見た回転角に分けて考え，前者を単に「回転角」後者を「自転角」で表す。このとき，

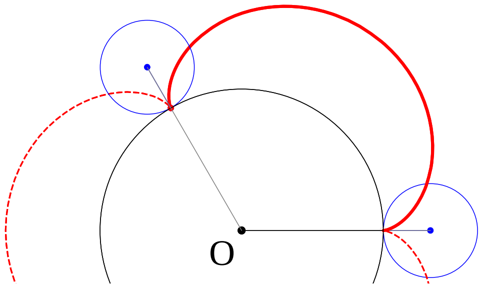
自転角＝回転角＋公転角

が成り立っている。




１回「自転」したところ。

$$\text{回転角} = \frac{3}{2}\pi$$
$$\text{自転角} = 2\pi$$
$$\text{公転角} = \frac{\pi}{2}$$



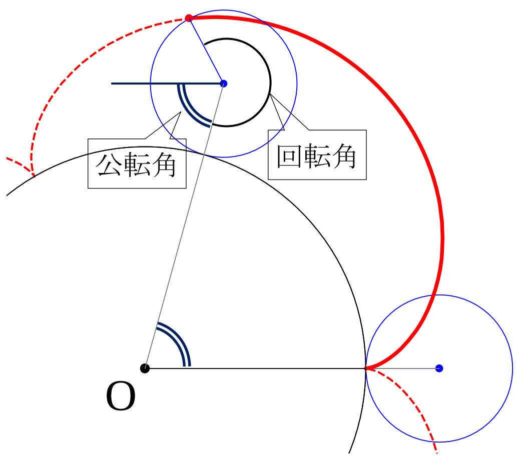

１回「回転」したところ。

$$\text{回転角} = 2\pi$$
$$\text{自転角} = 2\pi + \frac{5}{3}\pi$$
$$\text{公転角} = \frac{5}{3}\pi$$

半径を $R$ の定円の周りを，半径１の生成円が角 $\theta$ だけ回転するとき，公転角は $\dfrac{\theta}{R}$ であるから，

$$\text{自転角} = \left(1+\frac{1}{R}\right)\theta$$

となる。

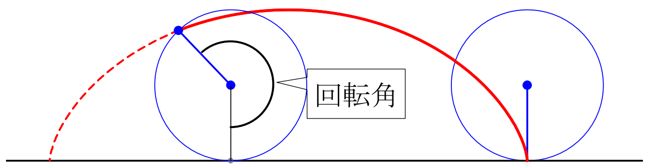



これに対して，同じ半径の生成円が直線上を転がるときを考えると，この場合は公転しないから，

$$\text{自転角} = \text{回転角} = \theta$$

が成り立つ。

これは，外サイクロイドの生成円はサイクロイドの生成円に比べて常に $1+\dfrac{1}{R}$ 倍の速さで自転していることを示している。したがって，外サイクロイドの弧長はサイクロイドの弧長の $1+\dfrac{1}{R}$ 倍である。[注3，4]

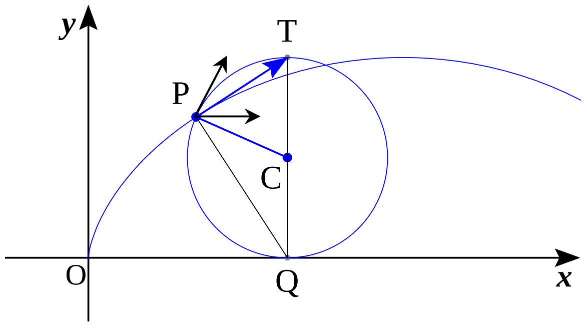



**注１（縮閉線と法線の包絡線）**

円の中心は円周上の２点における法線の交点であるから，曲線上の曲率円の中心は，曲線上の無限に近い２点における法線の交点である。これはまさしく法線の包絡線上の点である。

**注2（サイクロイドの接線）**

この性質については，点 P の速度が水平方向の速度と回転方向の速度の合成であり，これら 2 つの速度の大きさが等しいことから，示すこともできる。




**注3（外サイクロイドの弧長と角速度の関係）**

サイクロイドの弧長と外サイクロイドの弧長の比が，運動点の速度の比，すなわち角速度の比に等しいことは，堀部和経氏（愛知県立春日井東高等学校：2009 年 2 月現在）の着想による。

**注4（外サイクロイドの弧長と角速度の関係の補足）**

サイクロイドおよび外サイクロイドの運動点 P は，接地点 Q を中心とする円運動をしているから，点 P の速さ（速度の大きさ）は，PQ の長さ×角速度である。

サイクロイドト外サイクロイドにおいて，回転角が等しいとき，PQ の長さは等しいから，速さの比は角速度の比に等しい。