1984.11.9

同じものを含む円順列の個数について

==

$P_1, P_2, \cdots, P_m$ の m 種類の球がそれぞれ $n_1, n_2, \cdots, n_m$ 個で合計 N 個ある．
これら N 個の球の作る円順列の総数を求めてみよう．

==

記号および概念の定義

上記円順列の個数を $f(n_1, \cdots, n_m)$ とする．これら円順列のうち，（360° 未満の）いかなる回転によっても自分自身と重ならないものを素な円順列と呼ぶことにし，これらの個数を $g(n_1, \cdots, n_m)$ とする．また，$\dfrac{1}{k}$ 回転して初めて自分自身と一致するものも個数を $h_k(n_1, \cdots, n_m)$ とする．

基本性質

$n_1, \cdots, n_m$ の G.C.M.を l とし，$n_1 = a_1 l, \cdots, n_m = a_m l$ とする．
このとき，次式が成り立つ．

1．$k \mid l$（k が l の約数）のときのみ $h_k(a_1 l, \cdots, a_m l) > 0$ ，他の場合は 0.

2．$h_{\frac{l}{k}}(a_1 l, \cdots, a_m l) = g(a_1 k, \cdots, a_m k)$

3．$f(a_1 l, \cdots, a_m l) = \displaystyle\sum_{k|l} h_{\frac{l}{k}}(a_1 l, \cdots, a_m l)$　　（$\displaystyle\sum_{k|l}$ は，l の約数 k についての和）

4．$\dfrac{(Al)!}{(a_1 l)! \cdots (a_m l)!} = A \displaystyle\sum_{k|l} k h_{\frac{l}{k}}(a_1 l, \cdots, a_m l)$　（ただし，$A = a_1 + \cdots + a_m$）

（証明は次ページ）

上記１～４の証明

１は明らか

２の証明

円順列が $\dfrac{k}{l}$ 回転で重なるということは，この輪を $\dfrac{l}{k}$ 個の同じ長さの順列に分けると，それらは全て同じ順列である．この順列の長さは $N\Big/\dfrac{l}{k}=Ak$ であり，これを輪にすると小さな円順列ができる．この小円順列には，球 $P_1, P_2, \cdots, P_m$ が $a_1 k, \cdots, a_m k$ 個ずつ含まれている．また，もとの円順列が $\dfrac{k}{l}$ 回転ではじめて重なるということから，この小円順列は素である．したがって，このような小円順列の総数は $g(a_1 k, \cdots, a_m k)$ である．

３の証明

１より，

$$f(a_1 l, \cdots, a_m l)=\sum_{k|l} h_k(a_1 l, \cdots, a_m l)$$

ここで，$i=\dfrac{l}{k}$ とおけば，

$f(a_1 l, \cdots, a_m l)=\sum_{i|l} h_{\frac{l}{i}}(a_1 l, \cdots, a_m l)$ を得るので，i を k に置き換えればよい．

４の証明

円順列の１箇所を切り開いて一つの順列を作る方法は（長さ N の円順列では），この円順列が $\dfrac{1}{k}$ 回転して初めて自分自身と一致するときには $\dfrac{N}{k}$ 通りある．よって，

$$\frac{(Al)!}{(a_1 l)!\cdots(a_m l)!}=\sum_{k|l}\frac{N}{k}h_k(a_1 l, \cdots, a_m l)$$

ここで，$i=\dfrac{l}{k}$ とおけば

$$\begin{aligned}\frac{(Al)!}{(a_1 l)!\cdots(a_m l)!}&=\sum_{i|l} Ai\,h_{\frac{l}{i}}(a_1 l, \cdots, a_m l)\\&=A\sum_{i|l} i\,h_{\frac{l}{i}}(a_1 l, \cdots, a_m l)\end{aligned}$$

を得るので，i を k に置き換えればよい．

円順列の個数の計算

基本性質２，３，４より，次の２式を得る．

５．$f(a_1 l, \cdots, a_m l) = \sum_{k|l} g(a_1 k, \cdots, a_m k)$

６．$\dfrac{(Al)!}{(a_1 l)! \cdots (a_m l)!} = A \sum_{k|l} k\, g(a_1 k, \cdots, a_m k)$

ここで，計算の簡略化のために，

$f(a_1 l, \cdots, a_m l)$ を $f(l)$

$g(a_1 l, \cdots, a_m l)$ を $g(l)$

$\dfrac{(Al)!}{A(a_1 l)! \cdots (a_m l)!}$ を $h(l)$

とおくと，

５’．$f(l) = \sum_{k|l} g(k)$

６’．$h(l) = \sum_{k|l} k\, g(k)$

となる．この２式から $g(k)$ を消去すればよい．

上記の２式は，任意の自然数 l に対して成立するから，

６’より（反転定理を用いて），

$$l\, g(l) = \sum_{k|l} \mu\left(\frac{l}{k}\right) h(k)$$

これを５’に代入して，

$$\begin{aligned} f(l) &= \sum_{k|l} \left\{ \frac{1}{k} \sum_{i|k} \mu\left(\frac{k}{i}\right) h(i) \right\} \\ &= \sum_{i|l} \left\{ h(i) \sum_{i|k|l} \frac{1}{k} \mu\left(\frac{k}{i}\right) \right\} \\ &= \sum_{i|l} \left\{ h(i) \sum_{j|\frac{l}{i}} \frac{1}{i\, j} \mu(j) \right\} \\ &= \sum_{i|l} \left\{ \frac{h(i)}{i} \sum_{j|\frac{l}{i}} \frac{\mu(j)}{j} \right\} \end{aligned}$$

$\mu(i)$ はメビウス関数

$$\mu(i) = \begin{cases} 1 & (i = 1) \\ 0 & (i \text{ が素数の平方で割り切れる}) \\ (-1)^n & (i \text{ が異なる} n \text{個の素因数の積}) \end{cases}$$

$\sum_{i|k|l}$ とは，i の倍数であり，l の約数であるような k についての和

ところで，メビウス関数とオイラー関数について，

$$\sum_{k|n} k\,\mu\left(\frac{n}{k}\right)=\varphi(n)$$

であるから，

$$\sum_{j|n}\frac{n}{j}\mu\left(j\right)=\varphi(n) \quad \text{すなわち，} \quad \sum_{j|n}\frac{\mu\left(j\right)}{j}=\frac{\varphi(n)}{n}$$

これを上式に適用して，

$$f(l)=\sum_{i|l}\frac{h(i)}{i}\frac{\varphi\left(\frac{l}{i}\right)}{\frac{l}{i}}=\sum_{i|l}\frac{h(i)}{l}\varphi\left(\frac{l}{i}\right)$$

したがって．

$$f(a_1 l,\cdots,a_m l)=\frac{1}{Al}\sum_{i|l}\varphi\left(\frac{l}{i}\right)\frac{(Ai)!}{(a_1 i)!\,(a_2 i)!\cdots(a_m i)!}$$

$n_1=a_1 l,\cdots,n_m=a_m l$， $A=a_1+\cdots+a_m$， $Al=N$ であったから， $\frac{l}{i}=j$ とおくと，

$$f(n_1,\cdots,n_m)=\frac{1}{N}\sum_{j|l}\varphi\left(j\right)\frac{\left(\frac{N}{j}\right)!}{\left(\frac{n_1}{j}\right)!\left(\frac{n_2}{j}\right)!\cdots\left(\frac{n_m}{j}\right)!} \quad \text{（ l は， $n_1,\cdots,n_m$ の G.C.M.）}$$

これが，求める円順列の総数である．