2006.10.29

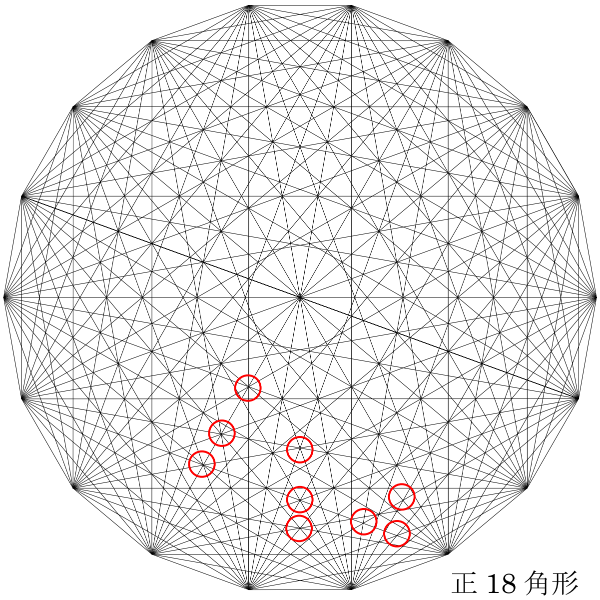
正 18 角形の対角線の交点について

友田勝久

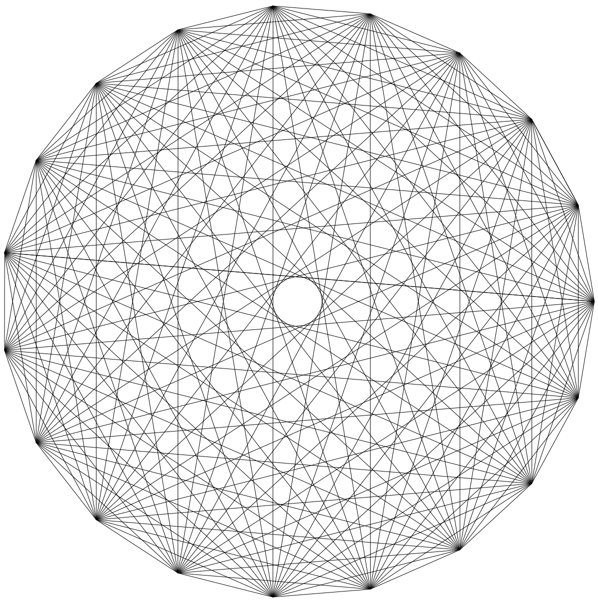
はじめに

正 18 角形の対角線をすべて引くと，多くの交点において，3 本以上の対角線が交わっていることがわかる。4 本や 5 本の対角線が 1 点で交わることも多く観察される。

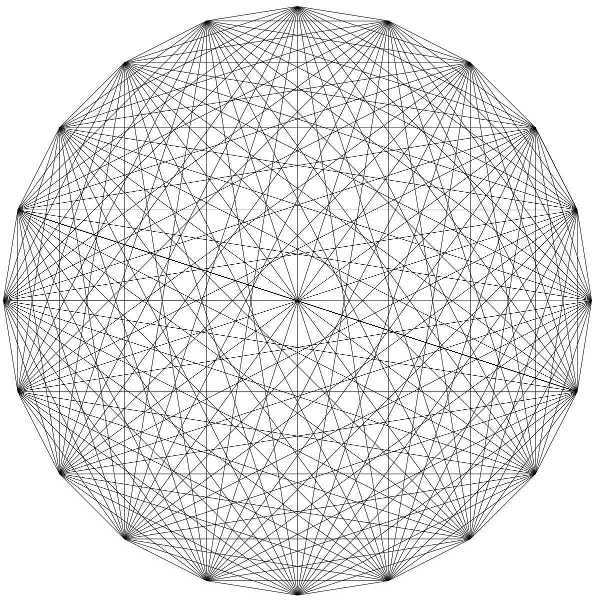
このような特徴は，正 18 角形にもっとも顕著に現れているように思える。正 19 角形ではどの 3 本の対角線をとっても 1 点で交わることはないし，正 20 角形においても，4 本以上の対角線が 1 点で交わるのは中心だけであり，3 本の対角線が 1 点で交わる場合でも，そのほとんどは中心を通る対角線上にある。



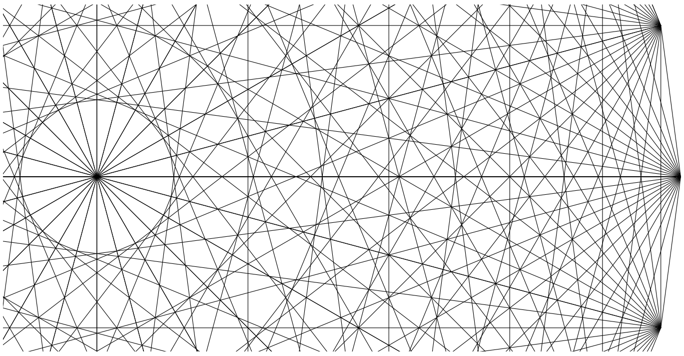
正 18 角形



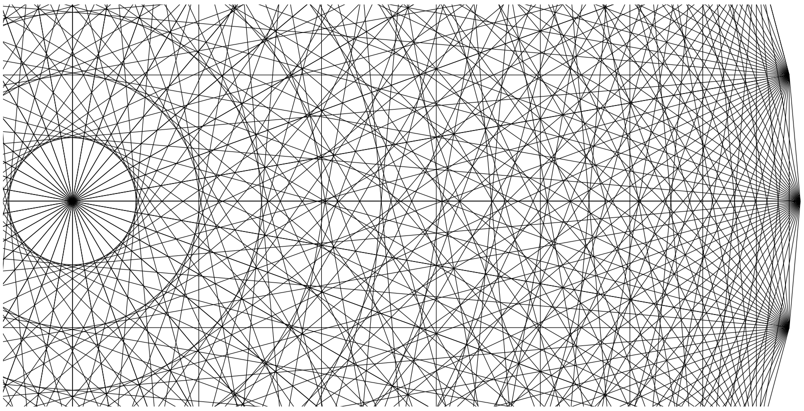
正 19 角形



正 20 形



正 24 角形の一部



正 36 角形の一部

正 24 角形や正 36 角形においても，正 18 角形と同様に 4 本以上の対角線が集まる点が見られるが，他の「普通の点」にまぎれていて，「多くある」という印象はない。

対角線の交点に関する正 18 角形の性質を裏付けるために，対角線の交点の個数を調べてみた。

正 n 角形の対角線の交点は，延べ

$${}_nC_4 = \frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3) \quad \text{本}$$

ある。これは，2 本の対角線の両端の 4 点を与えれば交点が定まることによる。このうち，実際に 2 本だけで交わっている点の総数を，いくつかの正多角形で調べたものが，下表である。

頂点の数	16	18	19	20	24
延べ交点数(A)	1,820	3,060	3,876	4,845	10,626
2本だけの交点数(B)	1,360	1,512	3,876	3,360	6,720
割合(B/A)	75%	49%	100%	69%	63%

これを見てもわかるように，正 18 角形では，対角線 2 本だけで交わる点の個数が他の正多角形に比べてはっきりと少ない。

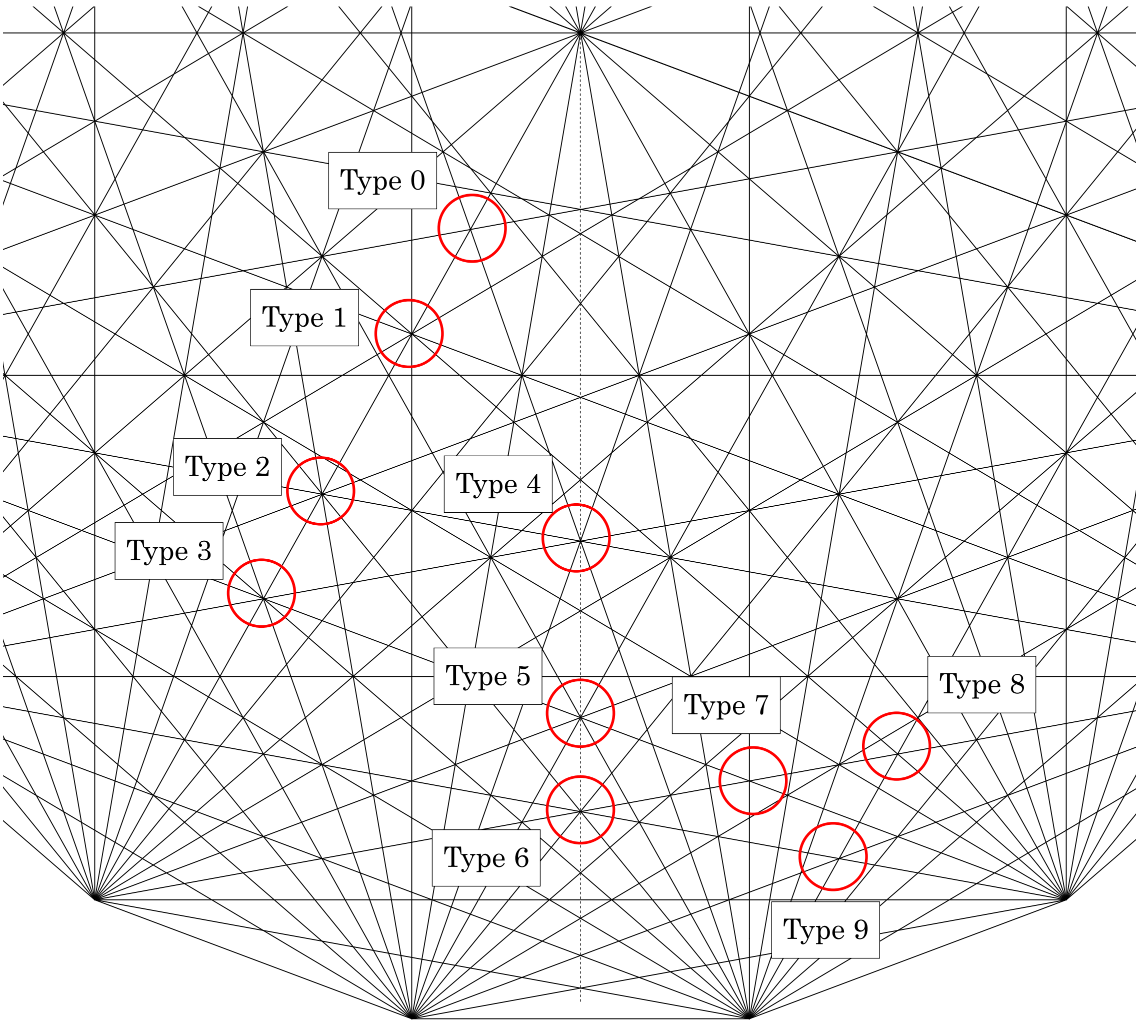
以下，正 18 角形の対角線の交点を分類し，多くの対角線が 1 点で交わることについて，まず初等幾何による考察を行い，次いで三角比による考察を行っていく。

交点の分類

3 本以上の対角線が交わる点は，図形の中心を除けば，次の 4 種類に分けることができる。

1. 中心を通る対角線上にあり，3 本の対角線が交わる。（下図，type 0）
   この場合，中心を通る対角線に対して，残りの 2 本は対称の位置にある。
2. 中心を通る対角線上にあり，5 本の対角線が交わる。（下図，type 1,2,3）
   この場合，中心を通る対角線に対して，残りの 4 本は対称の位置にある 2 本の直線 2 組からなる。
3. 中心を通る 2 本の対角線の二等分線（下図点線）上にあり，4 本の対角線が交わる。（下図，type 4,5,6）
   この場合，二等分線に対して，4 本は対称の位置にある 2 本の直線 2 組からなる。
4. 3 本が 1 点で交わるが，中心を通る対角線上にはない。対称性も認められない。（下図，type 7,8,9）

これらのうち，type 0 については，3 本の対角線が 1 点で交わるのは自明であるから，以後，type 1～9 の交点について調べていく。



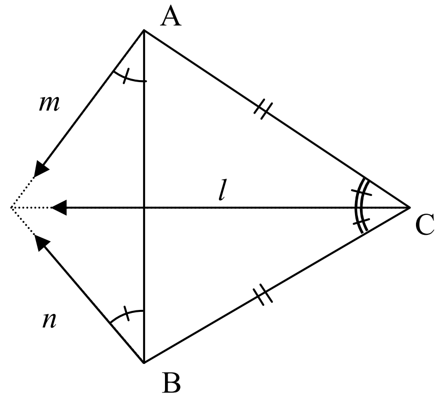
図の対称性を用いた初等幾何による考察

正 18 角形を眺めていると多くの対称性があることに気がつく。とくに二等辺三角形が多く見られる。そこで，二等辺三角形と直角に関する対称性に注目してみた。

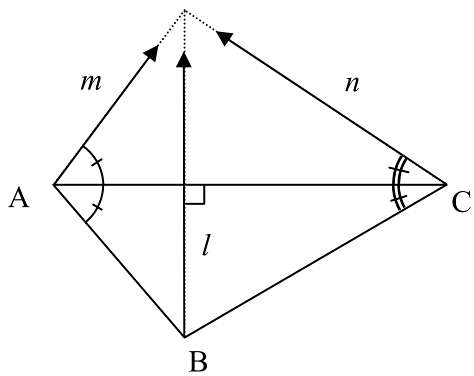
ここで用いるのは，次の性質である。

文章がやや言葉足らずかと思うが，図を見てそれを補っていただきたい。

1. AC = BC であるような二等辺三角形において，頂角 C の二等分線を l とする。また，直線 m, n はそれぞれ点 A, B を通り，直線 m と辺 AB のなす角は，直線 n と辺 AB のなす角に等しいとする。このとき，3 直線 l, m, n は 1 点で交わる。

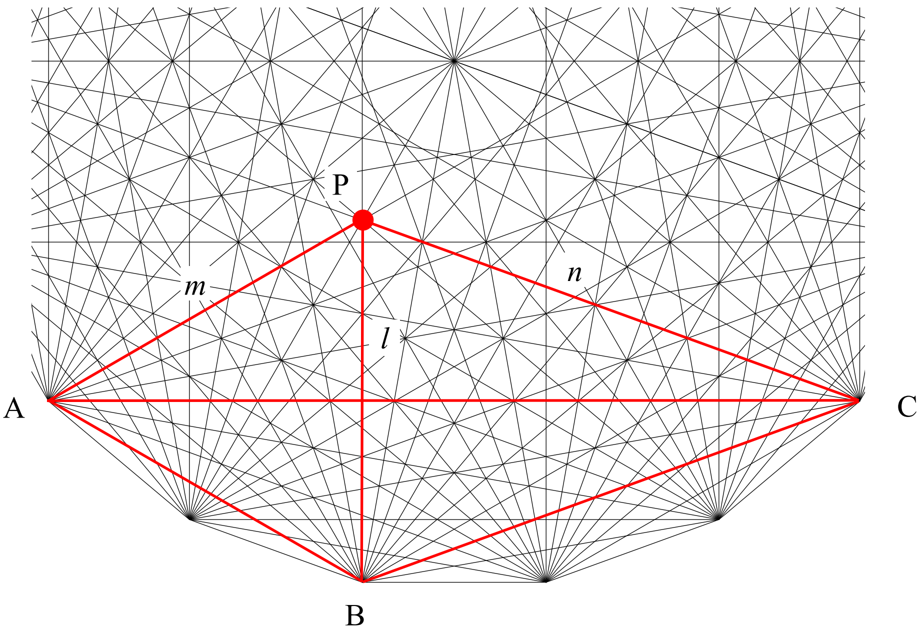


2. △ABC において，辺 AC と直交し頂点 B を通る直線を l とする。また，直線 m は，辺 AC に対して辺 AB と対称の位置にある直線とする。同様に，直線 n は，辺 AC に対して辺 BC と対称の位置にある直線とする。このとき，3 直線 l, m, n は 1 点で交わる。



以下，前述の 9 つのタイプ type 1 ～ type 9 について，対角線が 1 点で交わっていることを，上記の性質を用いて説明する。

Type 1



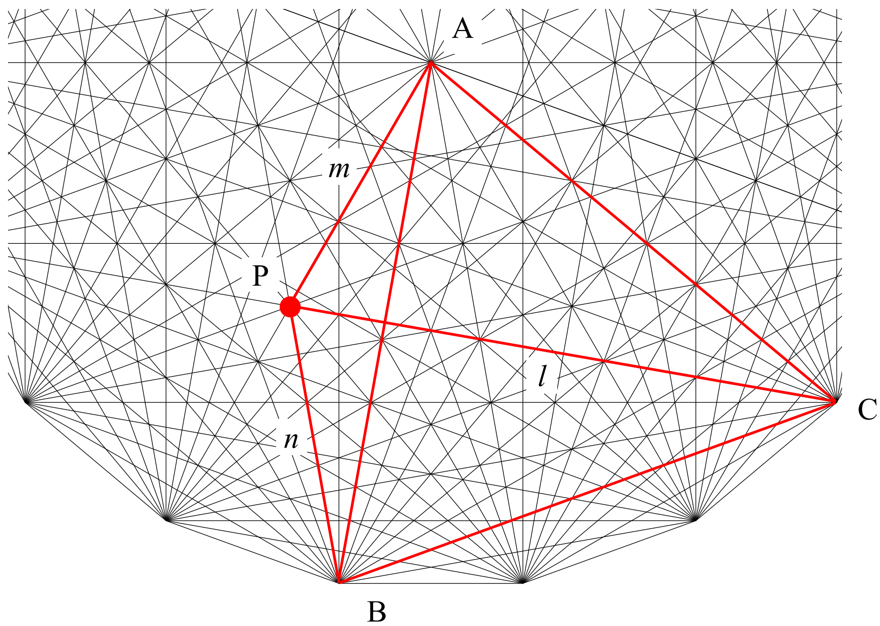
$\angle BAC = 30°$，対角線 AC と対角線 m のなす角も $30°$

$\angle BCA = 20°$，対角線 AC と対角線 n のなす角も $20°$

$AC \perp l$

以上の理由から，3 本の対角線 l, m, n は 1 点で交わる。なお，点 P では 5 本の対角線が交わっているが，中心を通る対角線に対する対称性から残りの 2 本も同じ点で交わる。

Type 2



まず，3 本の対角線 l, m, n が 1 点で交わることを示す。

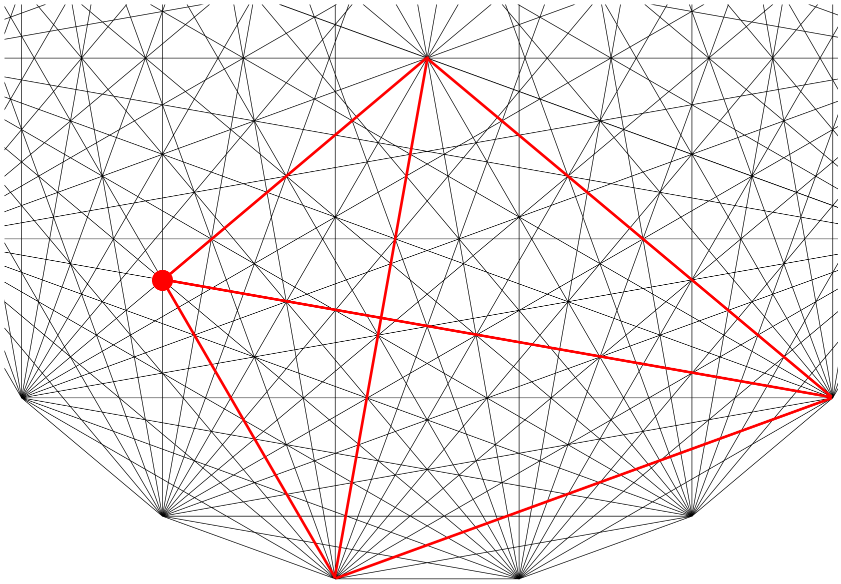
$\angle ABC = \angle ACB = 60°$ より， $AC = BC$

また，対角線 l は $\angle ACB$ を二等分しており，

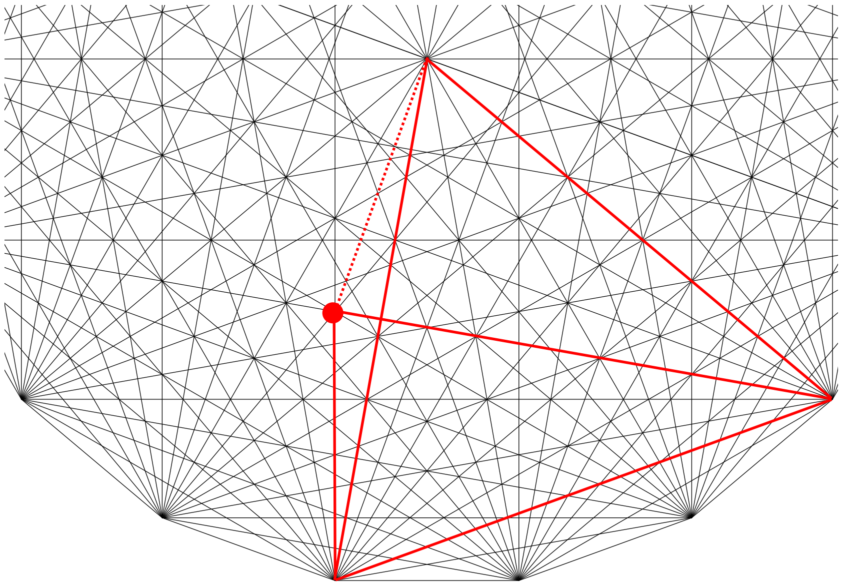
対角線 m と直線 AB のなす角と，対角線 n と直線 AB のなす角はともに $20°$ である。

したがって，3 本の対角線 l, m, n は 1 点で交わる。

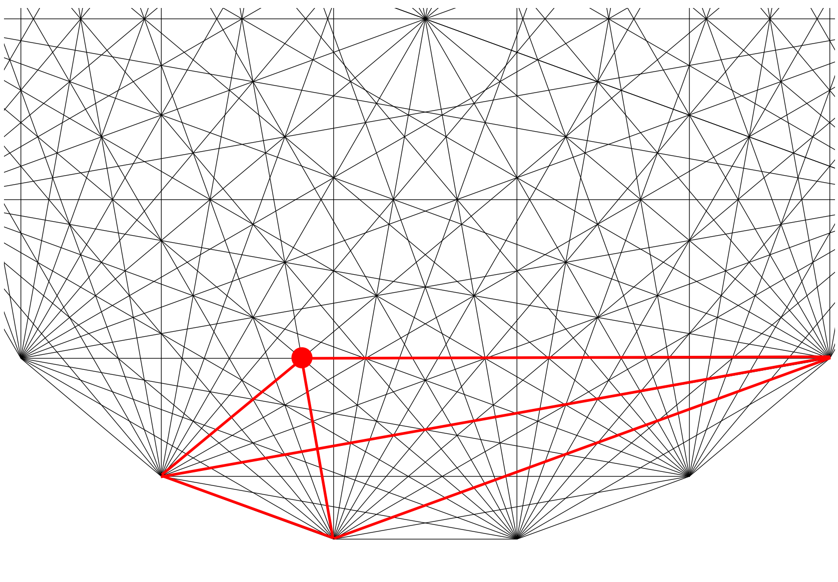
Type 3



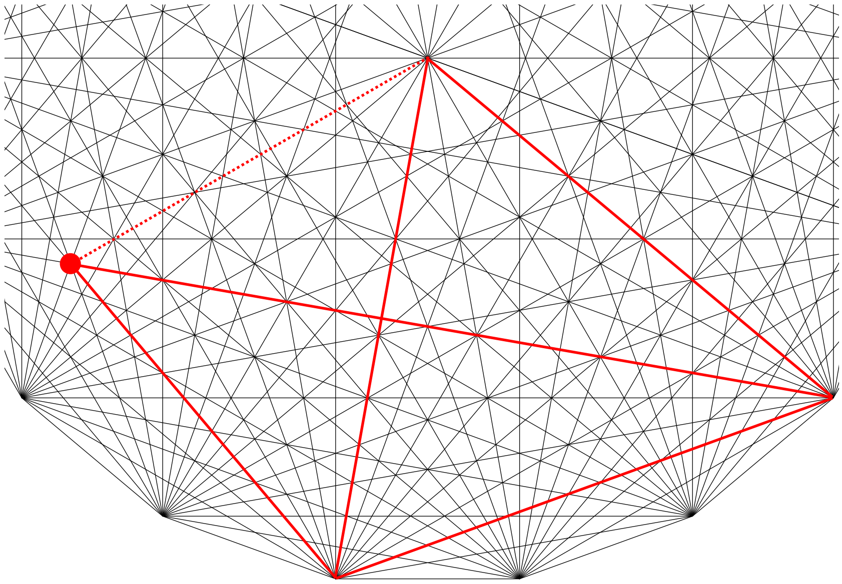
Type 4



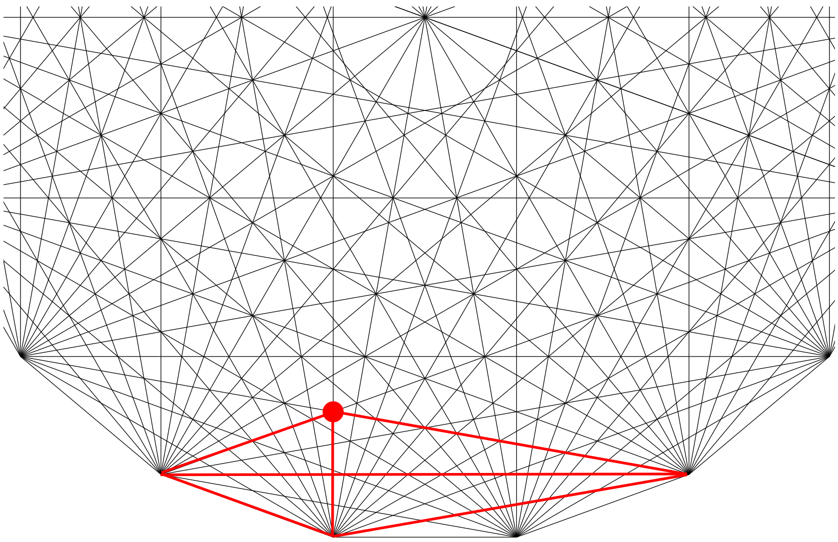
type 5



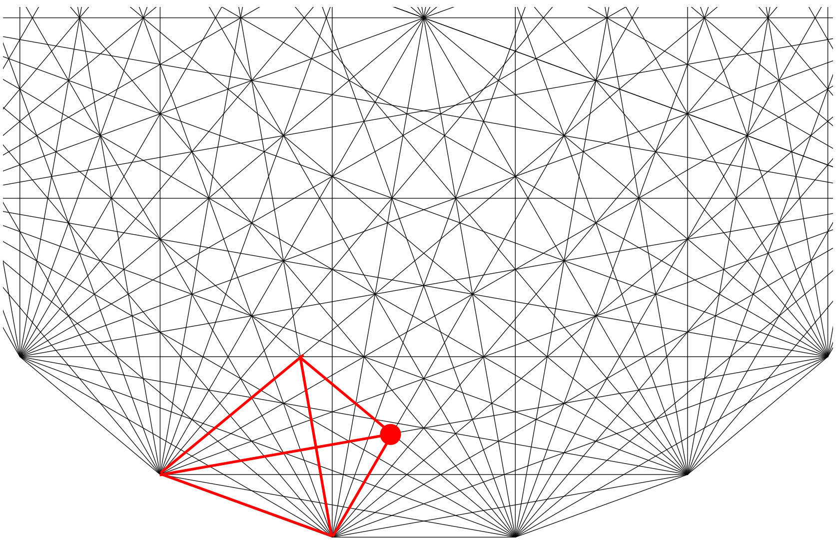
type 6



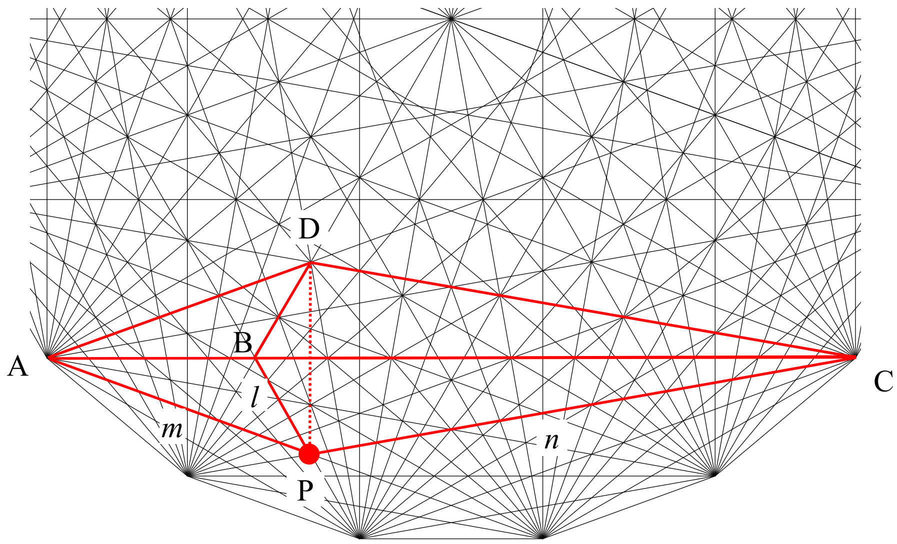
Type 7



type 8



type 9



$\angle$DAC = 20°，対角線 AC と対角線 m のなす角も 20°

$\angle$DBA = 60°，対角線 AC と対角線 l のなす角も 60°

$\angle$DCA = 10°，対角線 AC と対角線 n のなす角も 10°

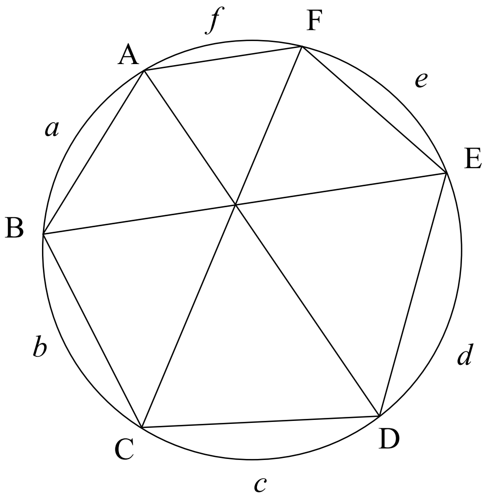
したがって，3 本の対角線 l, m, n は 1 点で交わる。

弦に関するチェバの定理を利用した三角関数による考察

弦に関するチェバの定理

円に内接する 6 角形 ABCDEF において，
「対角線 AD, BE, CF が 1 点で交わるための
必要十分条件は　$AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot FA$」

これの証明は，後ほど紹介する。

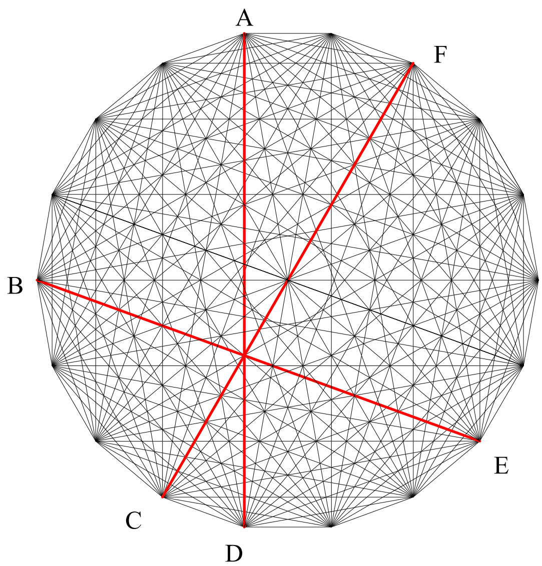


各弦の円周角を $a \sim f$ とする。(右図では，円の直径を 1 としている。すなわち，円周角＝弧長)
このとき，

$$AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot FA \quad \Leftrightarrow \quad \sin a \sin c \sin e = \sin b \sin d \sin f$$

である。
以下では，各 type において，この三角比の等式が成り立つことを示す。

type 1



$$AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot FA$$
$$\Leftrightarrow \quad \sin 40° \sin 10° \sin 50° = \sin 30° \sin 30° \sin 20°$$

$$\sin 40° \sin 50° = \sin 40° \cos 40° = \frac{1}{2} \sin 80°$$

であるから，

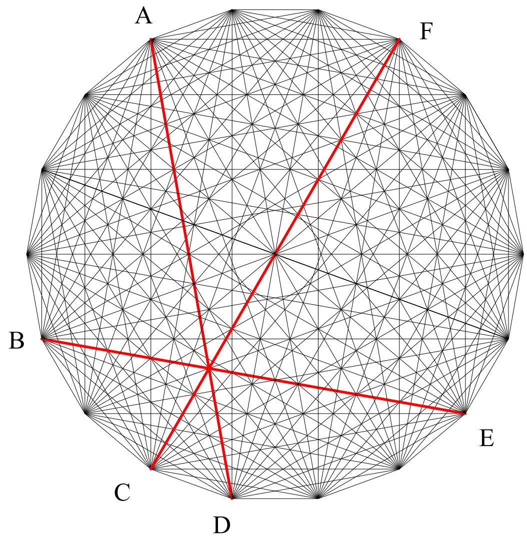
$$\begin{aligned}\sin 10° \sin 40° \sin 50° &= \frac{1}{2} \sin 10° \sin 80° \\ &= \frac{1}{2} \sin 10° \cos 10° \\ &= \frac{1}{4} \sin 20° \\ &= \sin 30° \sin 30° \sin 20°\end{aligned}$$

これによって，3 本の弦 AD, BE, CF が 1 点で交わることが示された，残りの 2 本については，弦 CF に関する対称性から，同一点を通ることがわかる。

type 2

$$AB\cdot CD\cdot EF = BC\cdot DE\cdot FA$$
$$\Leftrightarrow\quad \sin 40^\circ \sin 10^\circ \sin 50^\circ = \sin 20^\circ \sin 30^\circ \sin 30^\circ$$

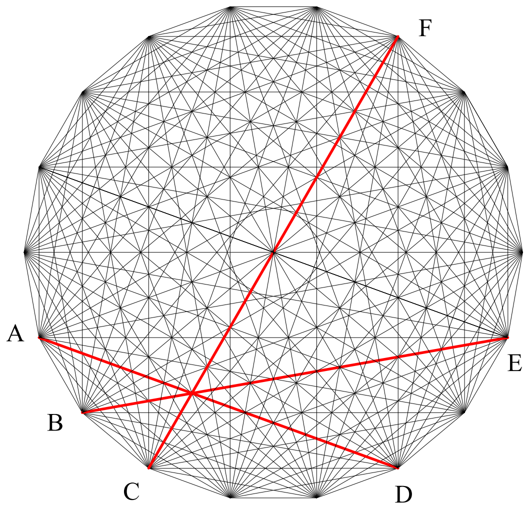
これは，type 1 と同じ。



type 3

$$AB\cdot CD\cdot EF = BC\cdot DE\cdot FA$$
$$\Leftrightarrow\quad \sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 40^\circ = \sin 10^\circ \sin 20^\circ \sin 70^\circ$$

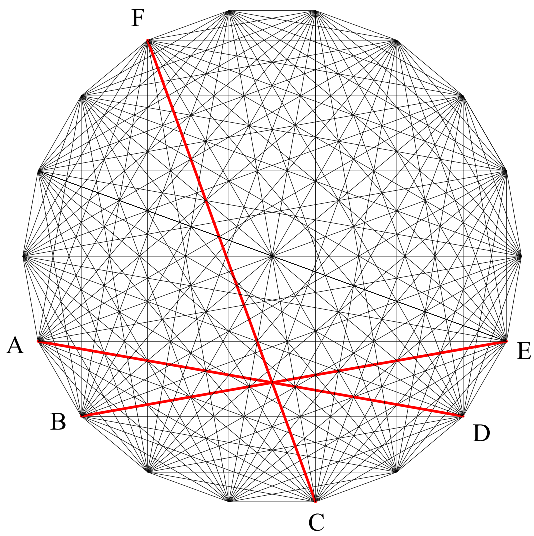
$$\begin{aligned}\sin 20^\circ \sin 70^\circ &= \sin 20^\circ \cos 20^\circ \\ &= \frac{1}{2}\sin 40^\circ \\ &= \sin 30^\circ \sin 40^\circ\end{aligned}$$



type 4

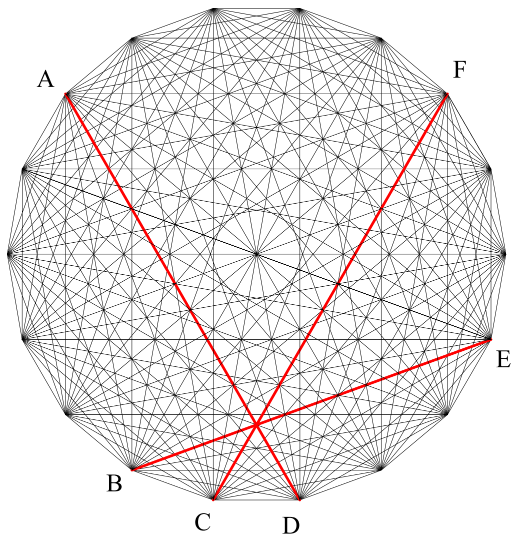
$$AB\cdot CD\cdot EF = BC\cdot DE\cdot FA$$
$$\Leftrightarrow\quad \sin 10^\circ \sin 20^\circ \sin 70^\circ = \sin 30^\circ \sin 10^\circ \sin 40^\circ$$

これは，type 3 と同じ。



type 5

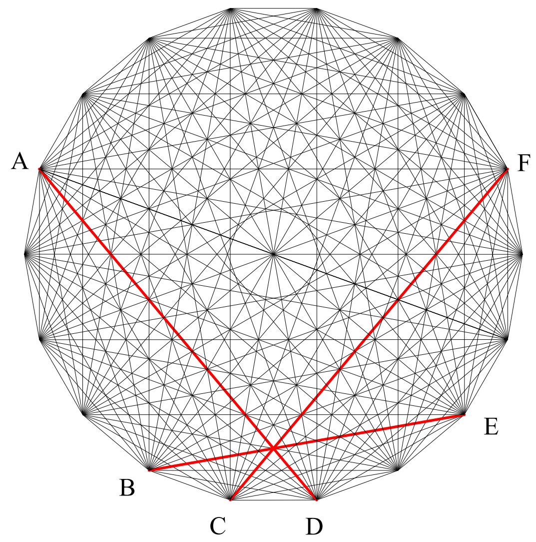
$$AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot FA$$
$$\Leftrightarrow \quad \sin 50^\circ \sin 10^\circ \sin 30^\circ = \sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ$$



type 6

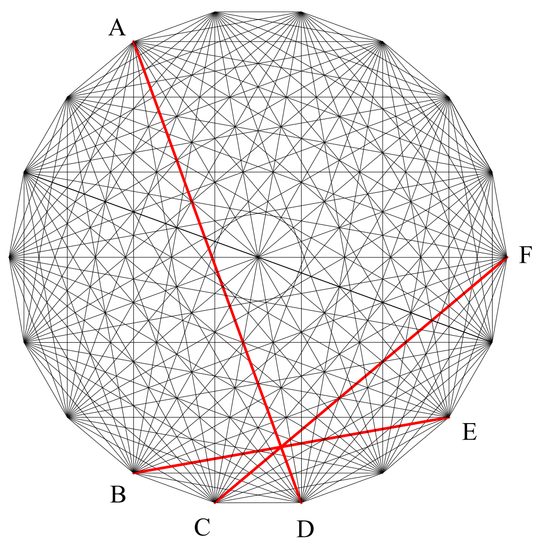
$$AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot FA$$
$$\Leftrightarrow \quad \sin 40^\circ \sin 10^\circ \sin 30^\circ = \sin 10^\circ \sin 20^\circ \sin 70^\circ$$

これは，type 3 と同じ。



type 7

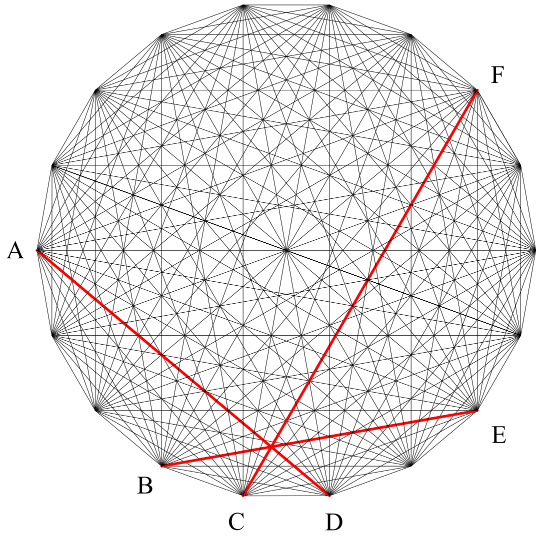
$$AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot FA$$
$$\Leftrightarrow \quad \sin 60^\circ \sin 10^\circ \sin 20^\circ = \sin 10^\circ \sin 20^\circ \sin 60^\circ$$



type 8

$$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}\cdot\mathrm{EF}=\mathrm{BC}\cdot\mathrm{DE}\cdot\mathrm{FA}$$
$$\Leftrightarrow\quad \sin 30^\circ \sin 10^\circ \sin 40^\circ = \sin 10^\circ \sin 20^\circ \sin 70^\circ$$

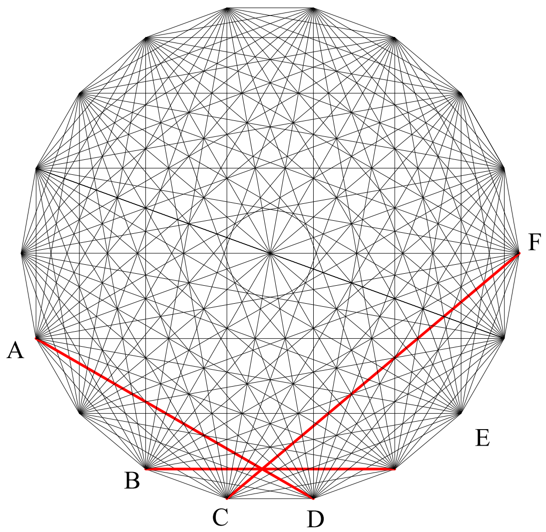
これは，type 3 と同じ。



type 9

$$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}\cdot\mathrm{EF}=\mathrm{BC}\cdot\mathrm{DE}\cdot\mathrm{FA}$$
$$\Leftrightarrow\quad \sin 20^\circ \sin 10^\circ \sin 30^\circ = \sin 10^\circ \sin 10^\circ \sin 100^\circ$$

$$\begin{aligned}\sin 10^\circ \sin 100^\circ &= \sin 10^\circ \sin 80^\circ \\ &= \sin 10^\circ \cos 10^\circ \\ &= \frac{1}{2}\sin 20^\circ \\ &= \sin 30^\circ \sin 20^\circ\end{aligned}$$



以上のことから，正 18 角形においては，4 本以上の対角線が 1 点で交わるようなことが多く見られること。また，中心を通らない 3 本の対角線が 1 点で交わることも見られることについて，確かめることができた。

補足１　弦に関するチェバの定理

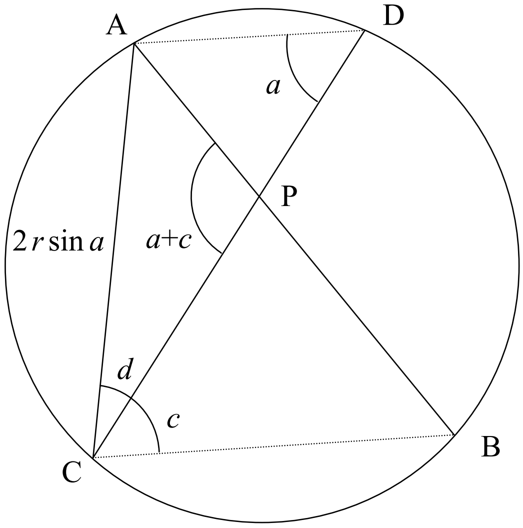
この簡潔な定理は，正 18 角形の対角線に関する性質を調べる中で，偶然に見つけたものですが，
「弦に関するチェバの定理」としてすでに知られているものでした。

以下では，私がたどった証明と，（よく知られた）初等幾何による簡潔な証明を掲載します。
また，最後に，このレポートを読まれた方からの指摘を掲載します。

円において，交わる弦が切り取る長さ

半径 r の円において，2 本の弦 AB，CD が点 P で交わるとする。
また，4 角形の辺 AC , CB, BD, DA の円周角を，a, b, c, d とおく。

このとき，　$\dfrac{\mathrm{AP}}{2r}=\dfrac{\sin a\sin d}{\sin(a+c)}$　が成り立つ。



（証明）　$\mathrm{AC}=2r\sin a$

であるから，△ACP において，

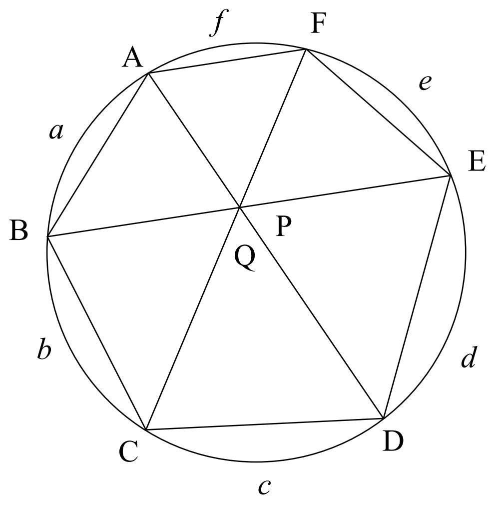
$$\frac{2r\sin a}{\sin(a+c)}=\frac{\mathrm{AP}}{\sin d}$$

よって，

$$\frac{\mathrm{AP}}{2r}=\frac{\sin a\sin d}{\sin(a+c)}$$　　（証明終）

弦に関するチェバの定理の証明

6 角形の辺 AB , BC, ・・・, FA の円周角を a, b, c, d, e, f ，円の直径を $2r$ とおく。
（右図では直径を 1 としている。すなわち，円周角=弧長）



対角線 AD , BE の交点を P とすれば，

$$\frac{\mathrm{AP}}{2r}=\frac{\sin a\sin(e+f)}{\sin(a+d)}$$

対角線 AD , CF の交点を Q とすれば，

$$\frac{\mathrm{AQ}}{2r}=\frac{\sin f\sin(a+b)}{\sin(c+f)}$$

であるから，3 本の対角線が 1 点で交わること，
すなわち $\mathrm{P}=\mathrm{Q}$ であるための条件は，

$$\frac{\sin a\sin(e+f)}{\sin(a+d)}=\frac{\sin f\sin(a+b)}{\sin(c+f)}$$

である。分母を払って，

$$\sin a\sin(e+f)\sin(c+f)=\sin f\sin(a+b)\sin(a+d)\qquad\cdots\quad ①$$

ここで，

$$
\begin{aligned}
&\sin(e+f)\sin(c+f)\\
&\qquad =(\sin e\cos f+\cos e\sin f)(\sin c\cos f+\cos c\sin f)\\
&\qquad =\sin f\,\{\cos f\,(\sin c\cos e+\cos c\sin e)+\cos c\cos e\sin f\}+\cos^2 f\sin c\sin e\\
&\qquad =\sin f\,\{\cos f\sin(c+e)+\sin f\cos c\cos e\}+\cos^2 f\sin c\sin e\\
&\qquad =\sin f\,\{\cos f\sin(c+e)+\sin f\cos(c+e)+\sin f\sin c\sin e\}+\cos^2 f\sin c\sin e\\
&\qquad =\sin f\sin(c+e+f)+(\sin^2 f+\cos^2 f)\sin c\sin e\\
&\qquad =\sin f\ \sin(c+e+f)+\sin c\sin e
\end{aligned}
$$

したがって，①の右辺は，

$$\sin a\sin(e+f)\sin(c+f)=\sin a\sin f\ \sin(c+e+f)+\sin a\sin c\sin e$$

同様に，①の左辺は，

$$\sin f\sin(a+b)\sin(a+d)=\sin f\sin a\sin(a+b+d)+\sin b\sin d\sin f$$

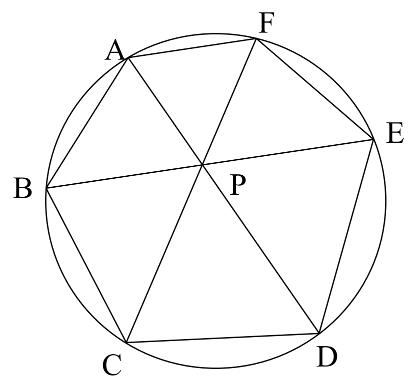
ここで，$(c+e+f)+(a+b+d)=\pi$ であるから，

$$\sin(c+e+f)=\sin(a+b+d)$$

よって，① $\Leftrightarrow$ $\sin a\sin c\sin e=\sin b\sin d\sin f$

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}\cdot\mathrm{EF}=\mathrm{BC}\cdot\mathrm{DE}\cdot\mathrm{FA}$ （証明終）

弦に関するチェバの定理の初等幾何による証明



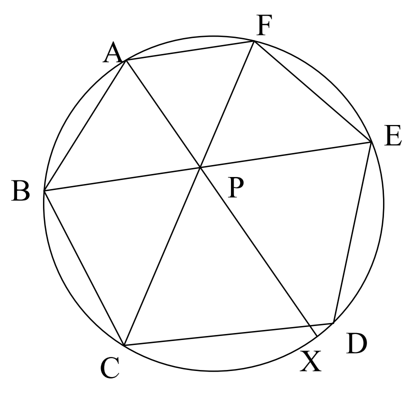
3 本の弦 AD, BE, CF がひとつの点 P で交わっているとすると，

$$\mathrm{AB}:\mathrm{PA}=\mathrm{DE}:\mathrm{PE}$$
$$\mathrm{CD}:\mathrm{PC}=\mathrm{FA}:\mathrm{PA}$$
$$\mathrm{EF}:\mathrm{PE}=\mathrm{BC}:\mathrm{PC}$$

これらを掛け合わせれば，

$$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}\cdot\mathrm{EF}=\mathrm{BC}\cdot\mathrm{DE}\cdot\mathrm{FA}$$

を得る。



逆に，$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}\cdot\mathrm{EF}=\mathrm{BC}\cdot\mathrm{DE}\cdot\mathrm{FA}$ が成り立つとき，弦 BE と CF の交点 P とする。直線 AP が円と再び交わる点を X とすれば，

$$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CX}\cdot\mathrm{EF}=\mathrm{BC}\cdot\mathrm{XE}\cdot\mathrm{FA}$$

であるから，

$$\mathrm{CD}:\mathrm{DE}=\mathrm{CX}:\mathrm{XE}$$

が成り立つ。弧 CDE が鋭角の円周角に対する弧であれば，2 点 D, X は明らかに同一点である。弧 CDE が鋭角に対する弧でない場合には，弧 FAB が鋭角に対する弧になるから，直線 DP と円との交点を X として，X=A を示せばよい。

弦に関するチェバの定理についての補足（2008. 8. 16）

　このレポートを読まれた方から，

「普通のチェバの定理は、三角形の辺の分割比でかかれますが、角度の sin の分割比でもかけて、そしてそれはまさに弦に関するチェバの定理そのものです。」

との指摘をいただきました。

　つまり，こういうことです。

（以下では，円の直径を 1 とすます）

　3 本の直線が 1 点 P で交わるための必要十分条件は，

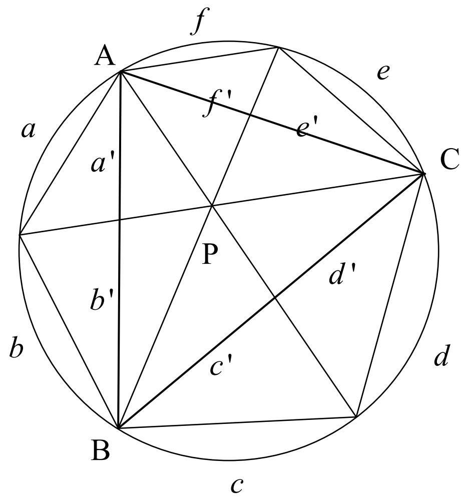
普通のチェバの定理では，

$$\frac{b'}{a'}\frac{d'}{c'}\frac{f'}{e'}=1$$

弦に関するチェバの定理では，

$$\frac{\sin b}{\sin a}\frac{\sin d}{\sin c}\frac{\sin f}{\sin e}=1$$

です。



　ここで，

$$\frac{b'}{a'}=\frac{\mathrm{BC}\sin b}{\mathrm{AC}\sin a}$$

$$\frac{d'}{c'}=\frac{\mathrm{AC}\sin d}{\mathrm{AB}\sin c}$$

$$\frac{f'}{e'}=\frac{\mathrm{AB}\sin f}{\mathrm{BC}\sin e}$$

ですから，

$$\frac{b'}{a'}\frac{d'}{c'}\frac{f'}{e'}=\frac{\sin b}{\sin a}\frac{\sin d}{\sin c}\frac{\sin f}{\sin e}$$

が成り立ちます。これは，普通のチェバの定理と弦に関するチェバの定理は，本質的に同じものであることを示しています。