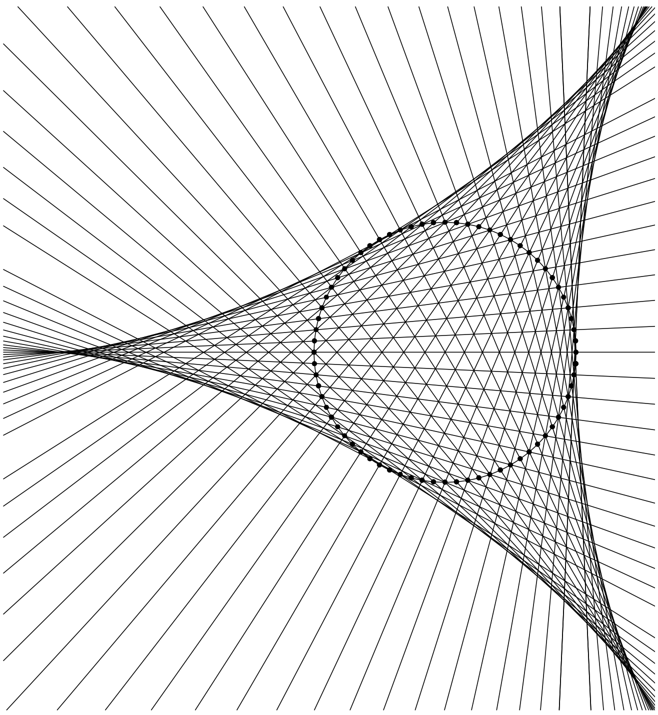
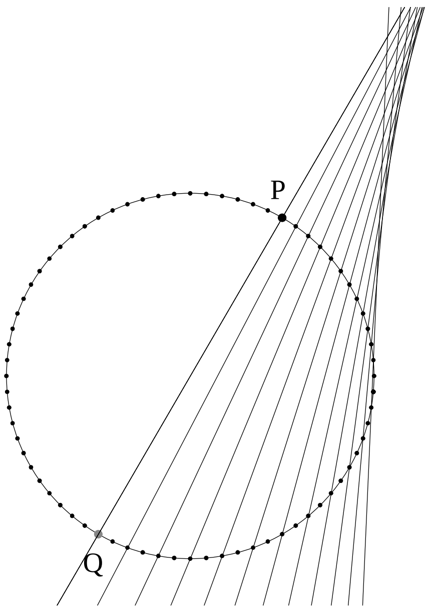
2007/11/28

円周上を 1 : 2 の速度比で反対方向に回る 2 点を結ぶ直線に関する代数的考察

友 田 勝 久

円周上に 2 点 P , Q があり，一定の角速度で回転している。P と Q の角速度の比が $1:(-2)$ であるとき，直線 PQ が作る直線群の包絡線はデルトイド（内トロコイドのひとつ）である。また，直線群の交点に注目してみると，3 本の直線が 1 点で交わっていることに気づく。





$1:(-2)$ の速さで円周上を回る
2 点による直線群

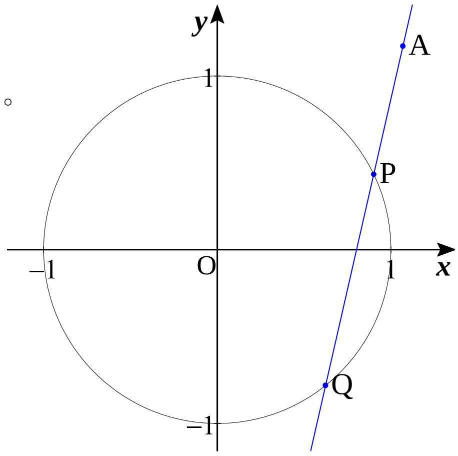
以下は，直線 PQ による直線群がデルトイドに対してどのような性質を持っているかを，複素平面と 3 次方程式によって考察したものであり，非常に美しい成果を見ることができる。

なお，この問題に関する初等幾何による考察は，「転がる円の直径の包絡線」「異なる速さで円周上を回る 2 点を結ぶ弦が作る模様」「円周上を 1：2 の速さで逆方向に回る 2 点を結ぶ弦の交点について」で述べている。

点 P の方程式

以下では複素平面で考える。

P , Q は単位円上を回るとし，その複素数による表現を $P(\omega)$, $Q(\omega^{-2})$ とする。そして，平面上に任意の点 $A(a)$ とる。まず，この点 A を通るような直線 PQ の存在条件を調べる。



直線 PQ 上に点 A があるとすると

$$\frac{a-\omega}{\omega^{-2}-\omega} \text{ は実数}$$

なので，

$$\frac{a-\omega}{\omega^{-2}-\omega} = \frac{\overline{a}-\omega^{-1}}{\omega^{2}-\omega^{-1}}$$

が成り立つ。2 点 P, Q が異なる位置にあるとき， $\omega^3 \neq 1$ であることを考慮して整理すると，

$$\omega^3 - a\,\omega^2 - \overline{a}\,\omega + 1 = 0 \quad \cdot\cdot\cdot \quad ①$$

を得る。$P(\omega)$ は単位円上の点であるが，この方程式の 3 つの解がすべて単位円上にあるとは限らない。このことから，

点 A を通る（直線群の）直線は高々3 本である。

ことがわかる。

以下では，点 $A(a)$ の位置によって，方程式①の解のうち単位円上にあるものの個数がどのように変化するか。また，単位円上に複数の解を持つ場合，それらの解の間の関係はどのようなものか。について調べていく。

解の性質

3 つの解を ω_1 , ω_2 , ω_3 とすれば，解と係数の関係から，

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = a \quad \cdot\cdot\cdot ②$$

$$\omega_1\omega_2 + \omega_2\omega_3 + \omega_3\omega_1 = -\overline{a} \quad \cdot\cdot\cdot ③$$

$$\omega_1\omega_2\omega_3 = -1 \quad \cdot\cdot\cdot ④$$

を得る。

次に，3 次方程式①

$$\omega^3 - a\,\omega^2 - \overline{a}\,\omega + 1 = 0$$

より

$$1 - \frac{a}{\omega} - \frac{\overline{a}}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^3} = 0$$

を得る。これの共役複素数をとって，

$$\frac{1}{\varpi^3}-\frac{a}{\varpi^2}-\frac{\overline{a}}{\varpi}+1=0$$

となる。これは，方程式①の ω に $\dfrac{1}{\varpi}$ を代入したものと同じであるから，

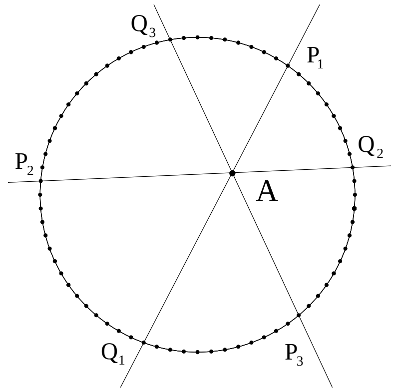
方程式①の解を ω_1 , ω_2 , ω_3 とすれば， $\dfrac{1}{\varpi_1},\dfrac{1}{\varpi_2},\dfrac{1}{\varpi_3}$ も解である。

解は 3 つしかないのだから，次のいずれかが成り立つとしても一般性は失わない。

i） $\omega_1=\dfrac{1}{\varpi_1}, \omega_2=\dfrac{1}{\varpi_2}, \omega_3=\dfrac{1}{\varpi_3}$

ii） $\omega_1=\dfrac{1}{\varpi_1}, \omega_2=\dfrac{1}{\varpi_3}, \omega_3=\dfrac{1}{\varpi_2}$

iii） $\omega_1=\dfrac{1}{\varpi_2}, \omega_2=\dfrac{1}{\varpi_3}, \omega_3=\dfrac{1}{\varpi_1}$



i）の場合

すべての解は単位円上にある。すなわち，

点 A を通る（直線群の）直線は 3 本ある。（右図）

ただし，重なる 2 直線は 2 本と数える。

ii）の場合

ひとつの解 ω_1 は単位円上にある。

また， $\arg\omega_2=\arg\omega_3$ かつ $|\omega_2||\omega_3|=1$ を得る。

$\omega_2\neq\omega_3$ の場合，単位円上の解はひとつしかない。

すなわち， $\omega_2\neq\omega_3$ のとき，点 A を通る（直線群の）直線は 1 本しかない。

iii）の場合，

$|\omega_1||\omega_2|=1$ であり，解と係数の関係から $|\omega_1||\omega_2||\omega_3|=1$ なので， $|\omega_3|=1$ を得る。

同様にして， $|\omega_1|=|\omega_2|=|\omega_3|=1$ を得る。つまり，すべての解は単位円上にある。

したがって，この iii）の条件は i）の特別な場合であるとみなすことができる。

一方， $\arg\omega_1=\arg\omega_2=\arg\omega_3$ であるから，3 重解になる。このとき，解と係数の関係から，

$3\omega_1=a$ ， $\omega_1{}^3=-1$ より， $a=3\left(\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{3}+i\sin\dfrac{(2k+1)\pi}{3}\right)$ （k は整数）

を得る。これはデルトイドの先端の 3 点（尖点）を表している。

また，いずれの場合においても，解と係数の関係④より，

$$\arg\omega_1+\arg\omega_2+\arg\omega_3=(2k+1)\pi \qquad (k \text{ は整数})$$

が成り立っている。

3 直線が 1 点で交わるときの点 A の存在領域

条件 i) を満たす点 A(a) の領域を D_1，条件 ii) を満たす点 A(a) の領域を D_2 とする。

このとき, 2 つの領域 D_1, D_2 の和集合は全平面であるから, これらの境界を求めるために, D_1, D_2 の共通部分を調べる。(共通部分が 2 つの領域の境界であることは, 必ずしも自明ではないが, この場合は正しい。)

条件 i) ii) をともに満たすとき,

$$\omega_2=\omega_3\,,\ \ |\omega_1|=|\omega_2|=|\omega_3|=1$$

であるから，解と係数の関係より,

$$\omega_1+2\omega_2=a\,,\ \omega_1{\omega_2}^2=-1$$

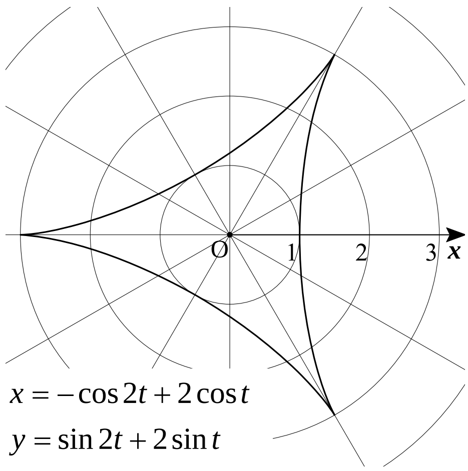
となり，$\arg\omega_2=t$ とすれば,

$$\omega_1=-{\omega_2}^{-2}=-(\cos 2t-i\sin 2t)$$

であるから,

$$a=(-\cos 2t+2\cos t)+i(\sin 2t+2\sin t)$$

を得る。これは, デルトイドを表している。ちなみに, このときの点 A(a) は 2 点 $\mathrm{P}_2(\omega_2)$, $\mathrm{Q}_2({\omega_2}^{-2})$ を $1:2$ に外分する点である。



$x=-\cos 2t+2\cos t$
$y=\sin 2t+2\sin t$

すなわち，2 つの領域 D_1，D_2 は，デルトイドによって分けられている。ここでデルトイド内の 1 点，例えば $a=0$ について調べると，方程式①は $x^3+1=0$ となるから，デルトイド内部は領域 D_1 に属する。したがって,

デルトイドの内部に点 A(a)があるとき，点 A(a)を通るは直線は 3 本ある。

デルトイドの外部に点 A(a)があるとき，点 A(a)を通るは直線は 1 本しかない。

なお，点 A(a)が単位円の内部にあるとき，すなわち $|a|<1$ のとき，3 つの解が単位円上にあることは，次のように直接示すことができる。

$|a|<1$ かつ ii) の条件を満たしているとすると,

解と係数の関係②より,

$$a-\omega_1=\omega_2+\omega_3$$

ところが，$\arg\omega_2=\arg\omega_3$ より $|\omega_2+\omega_3|=|\omega_2|+|\omega_3|$ が成り立つので,

$$|a-\omega_1|\le|a|+|\omega_1|<2\,,\quad |\omega_2+\omega_3|\ge 2\sqrt{|\omega_2||\omega_3|}=2$$

となり，矛盾を生じる。

3 直線が 1 点で交わるための点 P の条件

点 A がデルトイドの内部にあるとき，条件 i）を満たすことから，

$$|\omega_1|=|\omega_2|=|\omega_3|=1$$

であり，また，解と係数の関係④より，

$$\arg\omega_1+\arg\omega_2+\arg\omega_3=(2k+1)\pi \qquad (k \text{ は整数})$$

を得る。

一方，$\omega_1, \omega_2, \omega_3$ が上の 2 条件を満たすとき，

$$\omega_1\omega_2\omega_3=-1$$

であるから，

$$a=\omega_1+\omega_2+\omega_3$$

とおけば，

$$\overline{a}=\frac{1}{\omega_1}+\frac{1}{\omega_2}+\frac{1}{\omega_2}=-(\omega_1\omega_2+\omega_2\omega_3+\omega_3\omega_1)$$

を得る。つまり，

$\omega_1, \omega_2, \omega_3$ は方程式 $\omega^3-a\omega^2-\overline{a}\omega+1=0$ の解である

これは，方程式①と同じであるから，$\mathrm{P}_1(\omega_1), \mathrm{P}_2(\omega_2), \mathrm{P}_3(\omega_3)$，$\mathrm{Q}_1(\omega_1^{-2}), \mathrm{Q}_2(\omega_2^{-2}), \mathrm{Q}_3(\omega_3^{-2})$ とするとき，3 本の直線 $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1, \mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2, \mathrm{P}_3\mathrm{Q}_3$ はいずれも点 $\mathrm{A}(a)$ を通る。

よって，単位円上の 3 点 $\mathrm{P}_1(\omega_1), \mathrm{P}_2(\omega_2), \mathrm{P}_3(\omega_3)$ と $\mathrm{Q}_1(\omega_1^{-2}), \mathrm{Q}_2(\omega_2^{-2}), \mathrm{Q}_3(\omega_3^{-2})$ について，

3 直線 $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1, \mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2, \mathrm{P}_3\mathrm{Q}_3$ が 1 点で交わるための必要十分条件は，

$$\arg\omega_1+\arg\omega_2+\arg\omega_3=(2k+1)\pi \qquad (k \text{ は整数})$$

である。

直線 PQ とデルトイドの関係

いま，任意の実数 α に対して，

$$\omega_1=\cos\alpha+i\sin\alpha, \quad \mathrm{P}(\omega_1), \mathrm{Q}(\omega_1^{-2})$$

とし，

$$\alpha+\beta+\gamma=(2k+1)\pi \quad (k \text{ は整数})$$

を満たすように β, γ を定め，

$$\omega_2=\cos\beta+i\sin\beta, \quad \omega_3=\cos\gamma+i\sin\gamma$$

とする。このとき，

$$a=\omega_1+\omega_2+\omega_3$$

とすれば，

点 $\mathrm{A}(a)$ はデルトイド内部か周上（領域 D_1 ）にある

ここで，α を固定して β, γ を動かすとき，点 $\mathrm{A}(a)$ は直線 PQ 上を動くが，

$$\omega_1 = \cos\alpha + i\sin\alpha\,,\ \omega_2 = \cos\beta + i\sin\beta\,,\ \omega_3 = -\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\,,$$

であるから，

$$\begin{aligned} a &= (\cos\alpha + \cos\beta - \cos(\alpha+\beta)) + i\,(\sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha+\beta)) \\ &= \left(\cos\alpha + 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha+2\beta}{2}\right) + i\left(\sin\alpha + 2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha+2\beta}{2}\right) \\ &= \left(\cos\alpha + i\sin\alpha\right) + 2\sin\frac{\alpha+2\beta}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2} + i\cos\frac{\alpha}{2}\right) \end{aligned}$$

β を動かすとき， $-1 \le \sin\dfrac{\alpha+2\beta}{2} \le 1$ であるから，

$\left(\cos\alpha + i\sin\alpha\right) \pm 2\left(\sin\dfrac{\alpha}{2} + i\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)$ が表す 2 点を S , T とすれば，

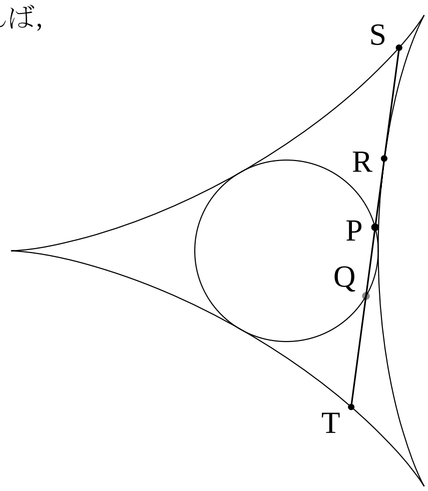
点 $\mathrm{A}(a)$ は，線分 ST 上を動く。

さらに， $\alpha = \pi - 2t$ とおけば，点 S , T は，

$$(-\cos 2t + i\sin 2t) \pm 2(\cos t + i\sin t)$$

と表せるから，2 点 S , T はいずれも同じデルトイド上にあることがわかる。すなわち，

点 $\mathrm{A}(a)$ の軌跡はデルトイドの弦 ST である。



また，この弦 ST の長さは，

$$|4(\cos t + i\sin t)| = 4$$

である。

さらに，2 点 $\mathrm{P}(\omega_1)$, $\mathrm{Q}(\omega_1{}^{-2})$ に対して，直線 PQ 上の 1 点 $\mathrm{R}\,(2\omega_1 - \omega_1{}^{-2})$ は

$$2\omega_1 - \omega_1{}^{-2} = (-\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha) + 2(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

であるから，デルトイド上にある。当然のことながら，点 R は領域 D_1 に属するから，線分 ST 上にある。実際，点 R は線分 ST を $\cos^2\dfrac{3t}{2} : \sin^2\dfrac{3t}{2}$ に内分する点であることが確かめられる。点 R が線分 ST の両端点と一致するのは，

$$\alpha = t + m\pi \quad \text{すなわち，} \quad \alpha = \frac{2m+1}{3}\pi \qquad (m\ \text{は整数})$$

のときだけであり，これはデルトイドの尖点を表している。したがって，

直線 PQ が尖点を通らないとき，弦 ST はその内部でデルトイドと共有点を持つ。

以上のことから，

単位円上を回る 2 点 $\mathrm{P}(\omega)$, $\mathrm{Q}(\omega^{-2})$ を結ぶ直線はデルトイドに接しながら動き，

直線 PQ がデルトイドから切り取られる弦の長さは一定である。

（以上で考察を終える）