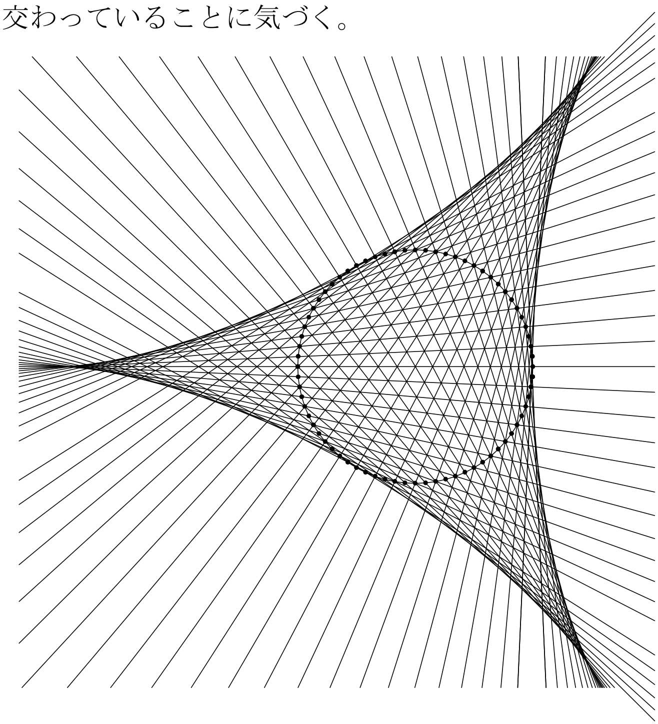
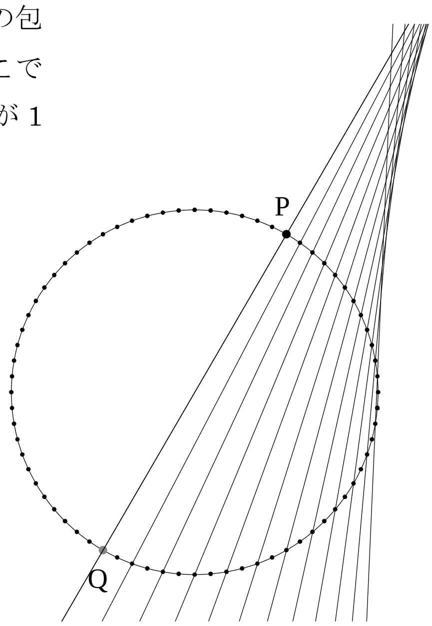
2007/11/11

円周上を 1 : 2 の速さで逆方向に回る 2 点を結ぶ弦の交点について

友 田 勝 久

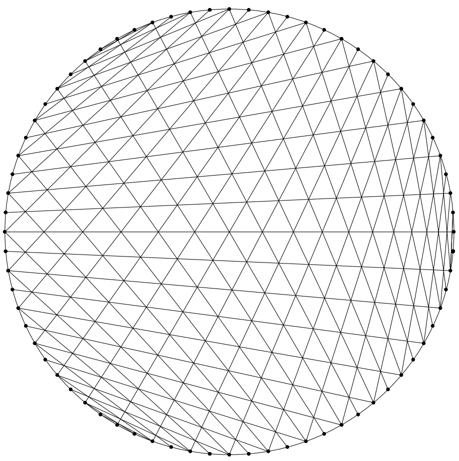
円周上に 2 点 P , Q があり，一定の角速度で回転している。P と Q の角速度の比が 1 : (–2) であるとき，直線 PQ が作る直線群の包絡線はデルトイド（内トロコイドのひとつ）である※1が，ここでは，直線群の交点に注目してみよう。そうすると，3 本の直線が 1 点で交わっていることに気づく。



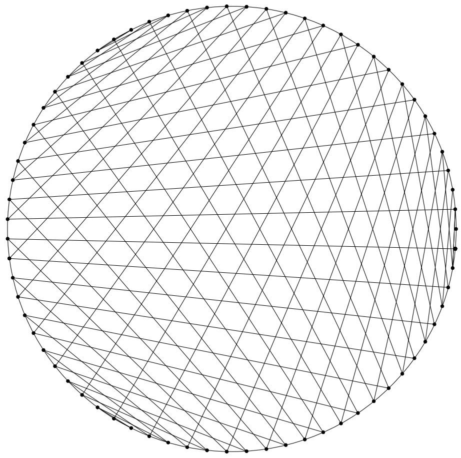


1 : (–2) の速さで円周上を回る 2 点による直線群

下左図は，上図の円内だけを取り出したものである。点 P , Q はいずれも正 72 角形の頂点上を動いている。しかし，下右図の正 71 角形では，同様の直線群を描いても 3 本の直線が 1 点で交わることはない。実際にいろいろな場合について調べてみると，偶数角形の場合に 3 本の直線が 1 点で交わることがわかった。これは，どうしてなのだろうか。



正 72 角形では 3 本の直線が 1 点で交わる。



正 71 角形では 3 本の直線が 1 点で交わることはない。

3本の直線が交わるための条件

以下では，円は単位円であるとし，極座標$(1,\theta)$の点PをP(θ)と表す。なお，3本の直線が円内で交わる場合について考察するが，それ以外の場合においても同様である。

まず，円周上に動点P(θ)，Q(-2θ)と定点A(0)，B$\left(\frac{2}{3}\pi\right)$，C$\left(\frac{4}{3}\pi\right)$をとる。

点Pが円周上を1周するとき，Qは2周するが，このとき弦PQは以下の3グループに分けることができる。同じグループ間では2本の弦が交わることはない。

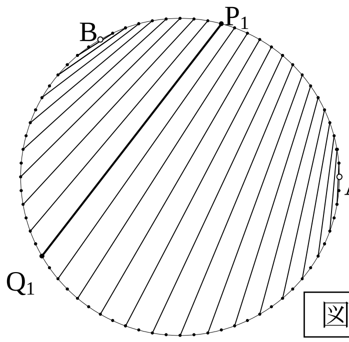


図1

１． $\theta=0$から$\theta=\frac{2}{3}\pi$まで動くとき（図１）

点P，Qは，点Aを出発し，点Bに到着する。

図1において，弧AP_1の中心角をαとすれば，

$P_1(\alpha)$ ，$Q_1(-2\alpha)$である。

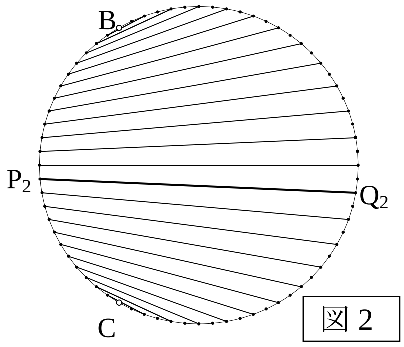


図2

２． $\theta=\frac{2}{3}\pi$から$\theta=\frac{4}{3}\pi$まで動くとき（図２）

点P，Qは，点Bを出発し，点Cに到着する。

図2において，弧BP_2の中心角をβとすれば，

$P_2\left(\frac{2}{3}\pi+\beta\right)$ ，$Q_2\left(\frac{2}{3}\pi-2\beta\right)$ である。

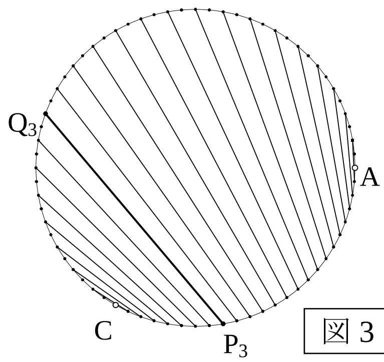


図3

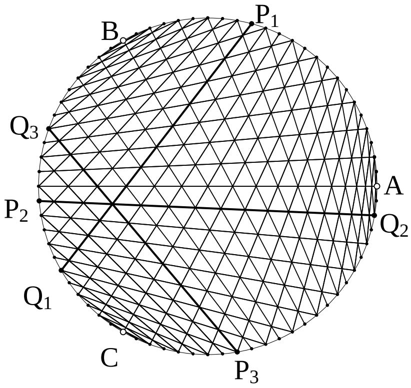
３． $\theta=\frac{4}{3}\pi$から$\theta=2\pi$まで動くとき（図３）

点P，Qは，点Cを出発し，点Aに到着する。

図3において，弧CP_3の中心角をγとすれば，

$P_3\left(\frac{4}{3}\pi+\gamma\right)$ ，$Q_3\left(\frac{4}{3}\pi-2\gamma\right)$ である。

3つのグループを重ねて表示すると右図のようになる。この図の場合，θを5°（$\frac{\pi}{36}$ラジアン）ずつ進めているのだが，３つのグループの直線群がうまく１点で交わっている。そこで，３つの角α, β, γにどのような条件があるときに１点で交わるのかを調べた。

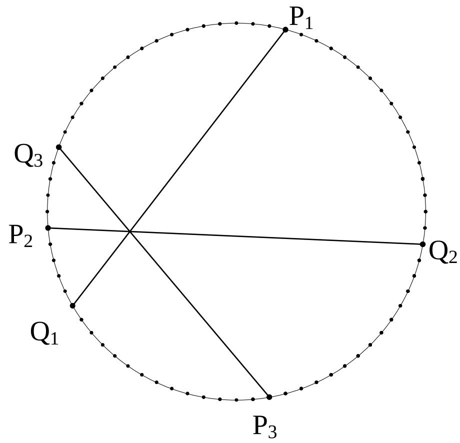


3 本の弦の両端点は次のように与えられる。

$P_1(\alpha)$, $Q_1(-2\alpha)$

$P_2\left(\frac{2}{3}\pi+\beta\right)$, $Q_2\left(\frac{2}{3}\pi-2\beta\right)$

$P_3\left(\frac{4}{3}\pi+\gamma\right)$, $Q_3\left(\frac{4}{3}\pi-2\gamma\right)$



これを用いて，6 個に分かれた弧の中心角を求める。

弧 P_1Q_3 : $-2\gamma-\alpha+\frac{4}{3}\pi$

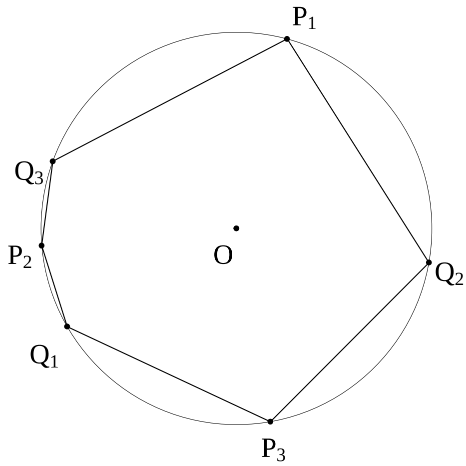
弧 Q_3P_2 : $\beta+2\gamma-\frac{2}{3}\pi$

弧 P_2Q_1 : $-2\alpha-\beta-\frac{2}{3}\pi+2\pi=-2\alpha-\beta+\frac{4}{3}\pi$

弧 Q_1P_3 : $\gamma+2\alpha+\frac{4}{3}\pi-2\pi=\gamma+2\alpha-\frac{2}{3}\pi$

弧 P_3Q_2 : $-2\beta-\gamma-\frac{2}{3}\pi+2\pi=-2\beta-\gamma+\frac{4}{3}\pi$

弧 Q_2P_1 : $\alpha+2\beta-\frac{2}{3}\pi$



弧 Q_2P_1 と弧 P_1Q_3 の中心角の差は，

$$\left(\alpha+2\beta-\frac{2}{3}\pi\right)-\left(-2\gamma-\alpha+\frac{4}{3}\pi\right)=2(\alpha+\beta+\gamma)-2\pi \quad ・・・①$$

弧 Q_3P_2 と弧 P_2Q_1 の中心角の差は，

$$\left(\beta+2\gamma-\frac{2}{3}\pi\right)-\left(-2\alpha-\beta+\frac{4}{3}\pi\right)=2(\alpha+\beta+\gamma)-2\pi \quad ・・・②$$

弧 Q_1P_3 と弧 P_3Q_2 の中心角の差は，

$$\left(\gamma+2\alpha-\frac{2}{3}\pi\right)-\left(-2\beta-\gamma+\frac{4}{3}\pi\right)=2(\alpha+\beta+\gamma)-2\pi \quad ・・・③$$

このことから，$\alpha+\beta+\gamma=\pi$ ※2 が成り立つとき，2 つの弧の中心角の差は 0 となり，2 つの中心角に対応する弦の長さは等しくなる。すなわち，

$Q_2P_1=P_1Q_3$, $Q_3P_2=P_2Q_1$, $Q_1P_3=P_3Q_2$ ・・・④

である。これを，これらの式を辺々掛け合わせると，

$Q_2P_1・Q_3P_2・Q_1P_3=P_1Q_3・P_2Q_1・P_3Q_2$ ・・・⑤

を得る。よって，弦に関するチェバの定理※3 より，3 直線 P_1Q_1 , P_2Q_2 , P_3Q_3 は 1 点で交わる。

逆に，$\alpha+\beta+\gamma=\pi$ が成り立たないとき，例えば $\alpha+\beta+\gamma>\pi$ のとき，円周角の差①②③はいずれも正になるから，④の 3 式はいずれも左辺の方が大きくなり※4，結果⑤の等式は成立せず，3 本の直線が 1 点で交わることはない。$\alpha+\beta+\gamma<\pi$ としても同様である。

偶数角形と奇数角形

最初に述べたように，偶数角形の場合には 3 本の弦が 1 点で交わるが，奇数角形ではこのようなことは起こらない。なぜだろうか。

点 P_1 , P_2 , P_3 の位置を，角ではなく，出発してから何個目の頂点にあるかで表し，それを a , b , c とする。このとき，

$$\alpha = \frac{2\pi a}{n},\quad \frac{2\pi}{3} + \beta = \frac{2\pi b}{n},\quad \frac{4\pi}{3} + \gamma = \frac{2\pi c}{n}$$

であるから，

$$2\pi + \alpha + \beta + \gamma = \frac{2\pi}{n}(a+b+c)$$

これより，

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi \quad \Leftrightarrow \quad a+b+c = \frac{3}{2}n$$

を得る。この条件を満たす整数 a , b , c が存在する必要十分条件は，n が偶数であることである。

※1　直線群の包絡線がデルトイドになることについては，
「転がる円の直径の包絡線」http://www.osaka-kyoiku.ac.jp/~tomodak/report/
「異なる速さで円周上を回る 2 点を結ぶ弦が作る模様」同上
に関連文献があります。

※2　α, β, γ はいずれも，0 から $\frac{2}{3}\pi$ までの角であるから，$\alpha + \beta + \gamma = n\pi$ を満たす整数 n は $n = 1$ だけである。

※3　弦に関するチェバの定理
「円に内接する 6 角形 ABCDEF について，3 本の対角線 AD , BE , CF が 1 点で交わるための必要十分条件は，AB・CD・EF = BC・DE・FA」
関連資料が，
「正 18 角形の対角線」http://www.osaka-kyoiku.ac.jp/~tomodak/report/
にあります。

※4　中心角 θ の弦の長さは，直径 $\times \sin\frac{\theta}{2}$ である。また，正の角 α, β に対して，$\alpha + \beta < 2\pi$, $\alpha < \beta$ ならば，$\sin\frac{\alpha}{2} < \sin\frac{\beta}{2}$ である。
