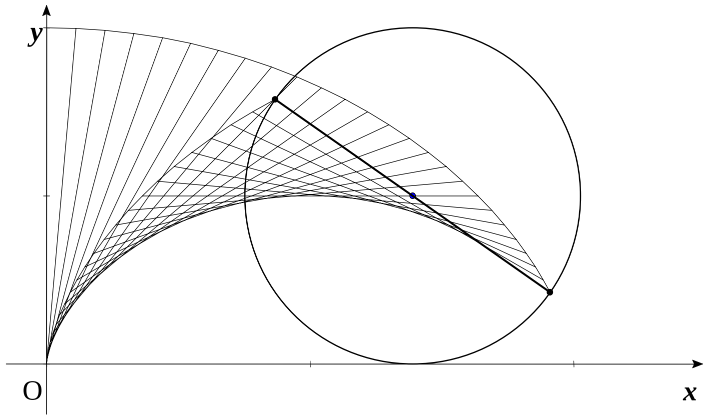
2006.10.31

転がる円の直径が作る包絡線について

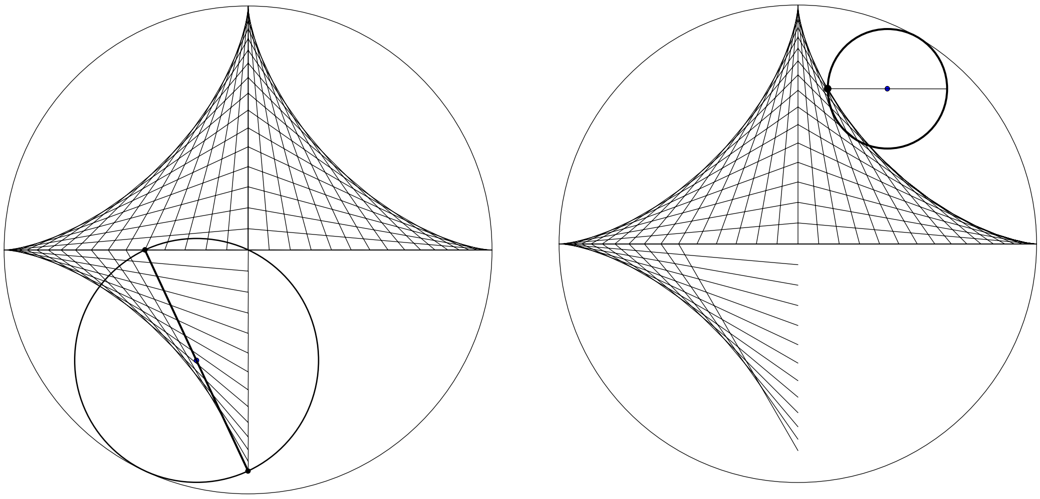
友田 勝久

はじめに

直線上を転がる円において，円周上の 1 店の軌跡はサイクロイドであるが，転がる円の直径が描く直線群の包絡線もやはりサイクロイドになる。このサイクロイドは，元のサイクロイドの$\dfrac{1}{2}$の大きさである。



同様に，定円の内部を転がる円において，直径が描く直線群の包絡線もやはりサイクロイド（内サイクロイド）になる。このサイクロイドは，転がる円の$\dfrac{1}{2}$の直径を持つ円によるサイクロイドである。



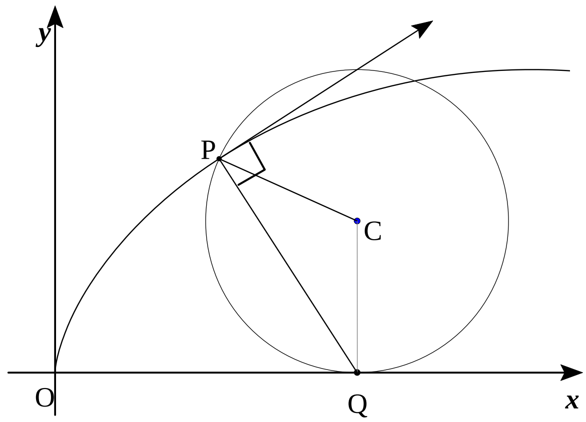
一般に，曲線上を転がる円において，円の直径が描く直線群の包絡線は，転がる円の$\dfrac{1}{2}$の直径を持つ円によるサイクロイドになっていると思われる。

以下では，これについての考察を行う。
なお，x 軸上を転がる円によるサイクロイドについて説明するが，x 軸を任意の曲線と読み替えても差し支えない。

サイクロイドの接線

サイクロイドは，x 軸上を回転する円における，円周上の 1 点の軌跡である。

転がる円は常に 1 点（右図点 Q）において x 軸と接している。この点において，円は接地しているので，接地点 Q における円の速度は 0 である。したがって，瞬間ごとにおいて，円は接地点 Q を中心とする円運動をしていることになり，円上の点 P における接線（速度ベクトルの方向）は半径 PQ と垂直である。

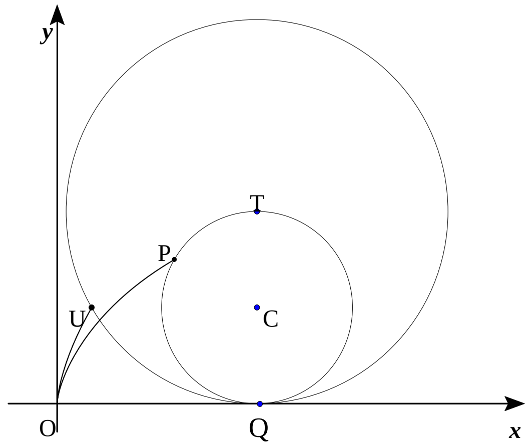


転がる 2 円

半径 2 r の大円と半径 r の小円が x 軸上を, 接地点を共有するように転がっているとしよう。

以下，2 円の中心を T, C，円周上にあって転がる点を U, P，接地点を Q とする。

大円上の点 U と小円上の点 P は，最初はともに原点にあり，円の回転とともにサイクロイドを描く。



この場合, 小円の回転速度は大円の回転速度の 2 倍であるから,

$$\angle \mathrm{UTQ} = \frac{1}{2}\angle \mathrm{PCQ}$$

一方, 小円において, 円周角と中心角の関係から,

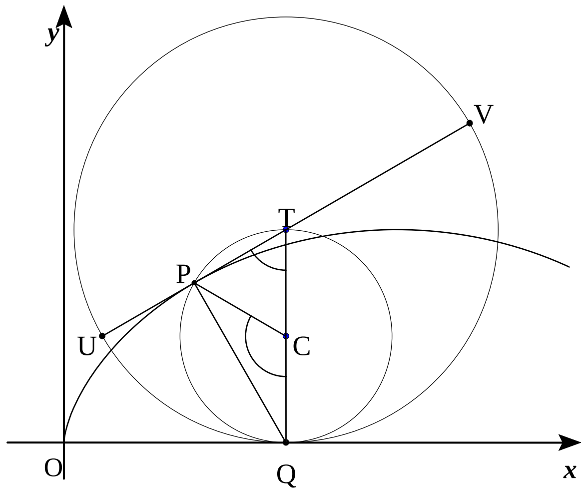
$$\angle \mathrm{PTQ} = \frac{1}{2}\angle \mathrm{PCQ}$$

よって，$\angle \mathrm{UTQ} = \angle \mathrm{PTQ}$ であり，3 点 U, P, T は一直線上にある。

ところで, $\angle \mathrm{QPT}$ は直径上の円周角であるから直角である。したがって,

$$\mathrm{UT} \perp \mathrm{PQ}$$

このことから，直径 UTV は小円上の点 P が作るサイクロイドの接線であることがわかる。



以上の考察から，次の結論を得る。

「転がる円の直径が描く直線群の包絡線は，転がる円の $\frac{1}{2}$ の直径を持つ円によるサイクロイドである。」