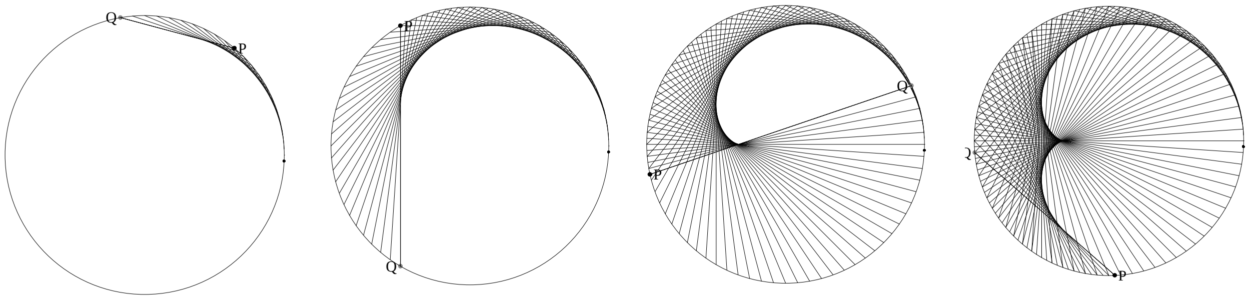
2006.11.1

円周上を定速でまわる 2 点を結ぶ弦の包絡線について

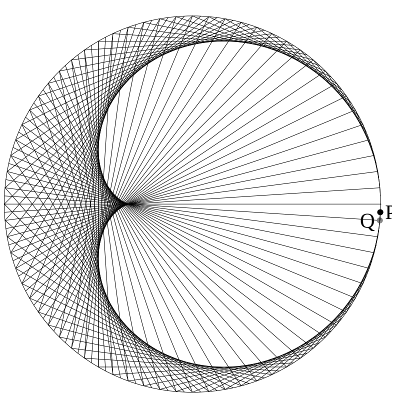
友田勝久

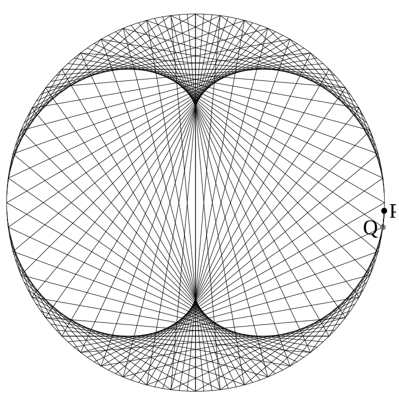
はじめに

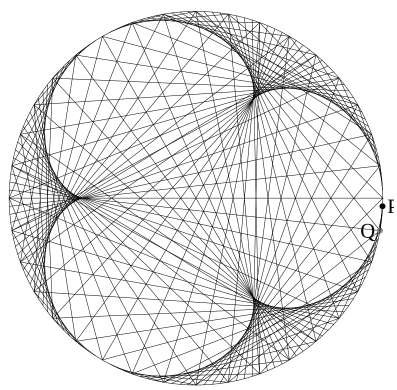
円周上を一定速度で回る 2 点 P，Q があり，Q は P の 2 倍の速さで回っているとする。このとき，2 点を結ぶ弦 PQ は直線群を描くが，この直線群の包絡線は外サイクロイドであるように思われる。



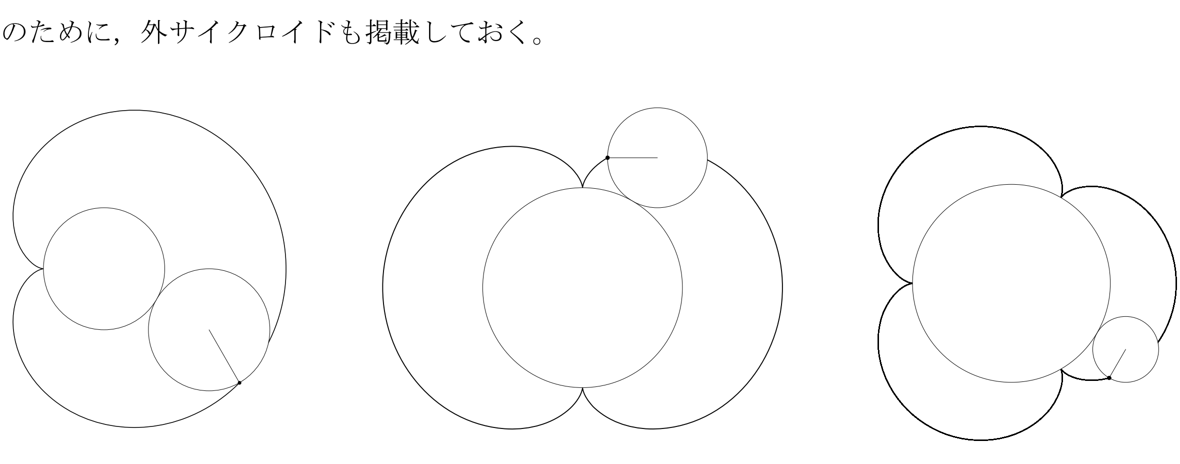
2 倍の速さではなく 3 倍や 4 倍の速さにしても，やはり外サイクロイドが得られる。


2 倍速


3 倍速

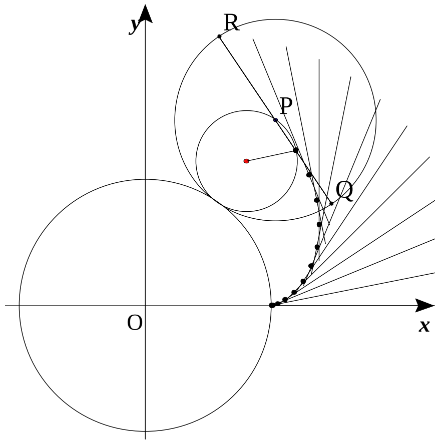

4 倍速

比較のために，外サイクロイドも掲載しておく。



なぜ外サイクロイドなのか

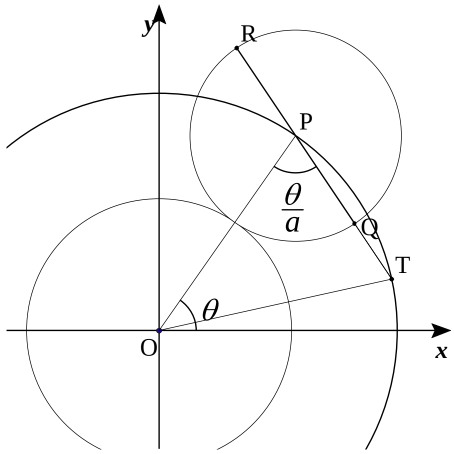
原点を中心とする半径 1 の円周上を，点 P を中心とする半径 a の円が転がっているとしよう。このとき，円 P の直径が作る直線群の包絡線は，半径 $\dfrac{a}{2}$ の円による外サイクロイドである。



右上図において，点 O を中心とする半径 OP の円を描き，円 P の直径 RPQ もしくはその延長がこの新しい円と交わる点を T とする。（右図）

動径 OP の偏角をθとすれば，$\angle \mathrm{OPT} = \dfrac{\theta}{a}$ であるから，動径 OT の偏角は，$\theta - \left(\pi - 2\times\dfrac{\theta}{a}\right) = \left(1+\dfrac{2}{a}\right)\theta - \pi$ である。

このことから，点 T が円周上を回る速さは，点 P の $\left(1+\dfrac{2}{a}\right)$ 倍であることがわかる。



以上の事柄をまとめると，次のようになる。

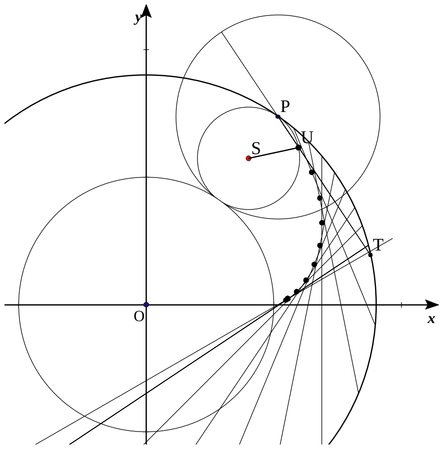
「半径$(1+a)$の円周上を回る 2 点 P, T があり，点 T は点 P の$\left(1+\dfrac{2}{a}\right)$倍の速さで回っているならば, 弦 PT が描く直線群の包絡線は，直径 1 の円周上を外接して回る半径$\dfrac{a}{2}$の円が描く外サイクロイドである。」

ちなみに，直線 PT は包絡線と点 U で接している。

ここで，△PSU ∽ △POT であるから，

$$\mathrm{PU} : \mathrm{UT} = \mathrm{PS} : \mathrm{SO} = \frac{a}{2} : \left(\frac{a}{2}+1\right) = 1 : \left(1+\frac{2}{a}\right)$$

これは，2 点 P , T の速度比を表している。



補足

円周上を回る 2 点が逆方向に回るときには，円の外側に包絡線ができる。この包絡線は内サイクロイドである。