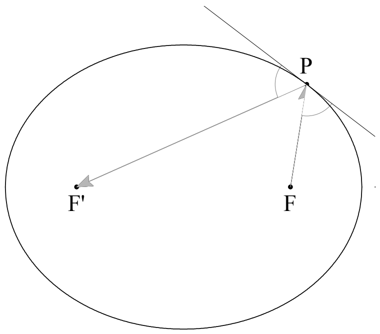
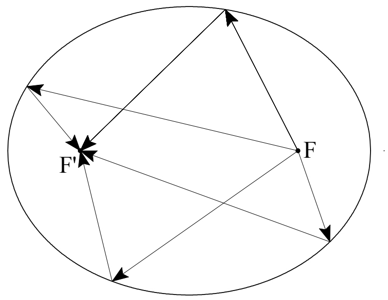
# 楕円のビリヤード

友田勝久　　2014/06/27

楕円形のビリヤード台があるとき，そこで打った球はどのような軌跡を描くだろうか？

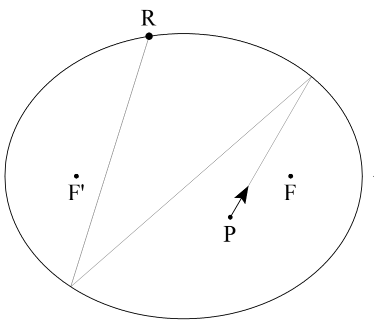
よく知られているように，２点 F , F' を焦点とする楕円上の任意の点 P において，２直線 PF , PF' と点 P における接線のなす角は等しい。このことから，焦点に置いた球は，どの方向に打っても，もうひとつの焦点に向かう。

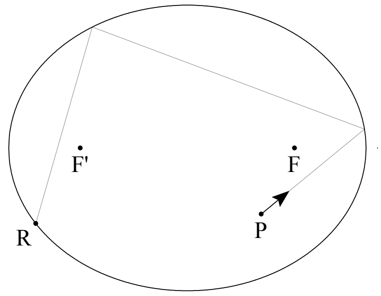


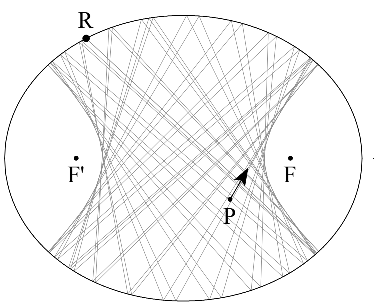



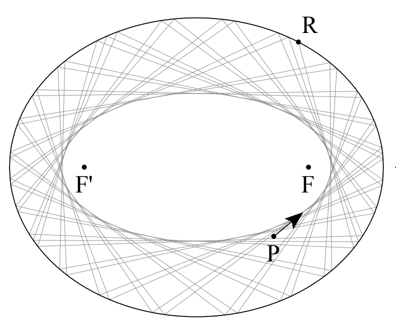

では，焦点以外の点に配置した球を，焦点を通らないように打った場合，どのような軌跡を描くだろうか。

初期条件によって軌跡は異なるが，包絡線として，もとの楕円と焦点を共有する楕円もしくは双曲線が得られる。



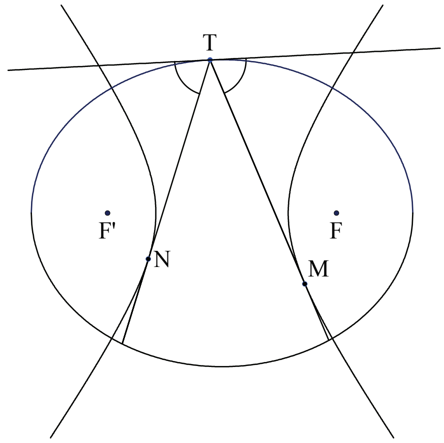




つまり，焦点を通らない球は，もとの楕円と焦点を共有するひとつの２次曲線に接するように転がっていく。

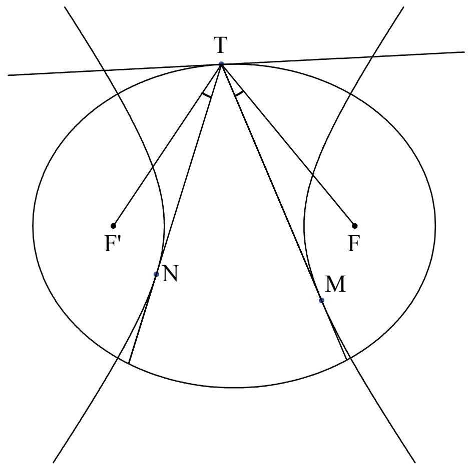
以下では，楕円と双曲線は，焦点を共有するものとする。

（命題１）

「双曲線上の２点 M，N における接線が，楕円の周上で交わるとき，この交点を T とすれば，２直線 TM，TN が点 T における楕円の接線となす角は等しい。」




これには上図以外にもいくつかの場合が想定できるが，いずれの場合においても，楕円や双曲線の接線の性質から，命題１と次の命題２は同値である。




（命題２）

$$\angle \mathrm{FTM} = \angle \mathrm{F'TN}$$

（命題２の証明）

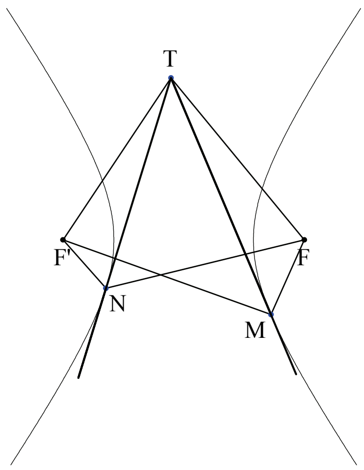
２点 M，N は，点 F，F'を焦点とする双曲線上にあるから，

$$\mathrm{MF'} - \mathrm{MF} = \mathrm{NF} - \mathrm{NF'}$$

が成り立つ。よって，

$$\mathrm{MF'} + \mathrm{NF'} = \mathrm{MF} + \mathrm{NF}$$

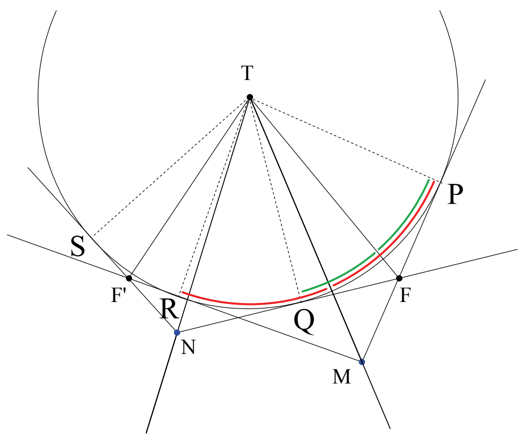
であるから，補助定理２より，四辺形 FMF'N はひとつの円に傍接する。




また，双曲線の接線の性質より，直線 MT , NT はそれぞれ ∠FMF', ∠FNF'を二等分するから，点 T は傍接円の中心である。

ここで，図のように接点を P , Q , R , S と定めると，

$$\begin{aligned}\angle \mathrm{FTM} &= \angle \mathrm{PTM} - \angle \mathrm{PTF} \\ &= \frac{1}{2}(\angle \mathrm{PTR} - \angle \mathrm{PTQ}) \\ &= \frac{1}{2}\angle \mathrm{QTR}\end{aligned}$$




同様にして，$\angle \mathrm{F'TN} = \frac{1}{2}\angle \mathrm{QTR}$

であるから，$\angle \mathrm{FTM} = \angle \mathrm{F'TN}$

（証明終）

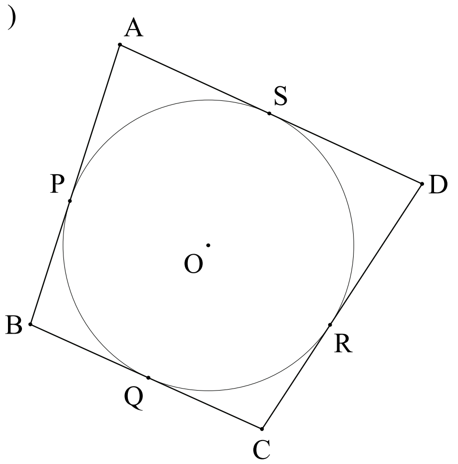
Ⅰ．（円に外接する四辺形の性質）

（補助定理Ⅰ）

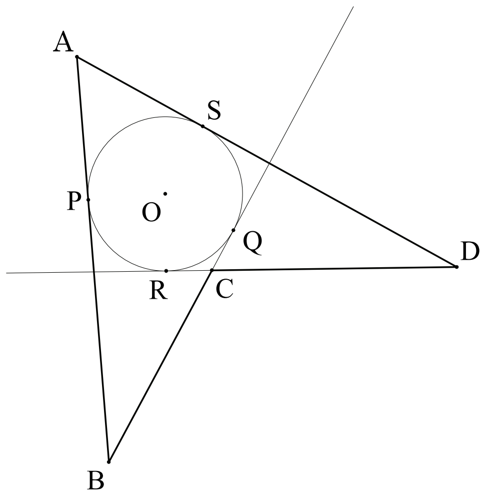
四辺形 ABCD がひとつの円に外接するための必要十分条件は，向かい合った２組の辺の長さの和が等しいことである。すなわち，

$$\mathrm{AB}+\mathrm{CD}=\mathrm{BC}+\mathrm{DA}$$

( i )




( ii )



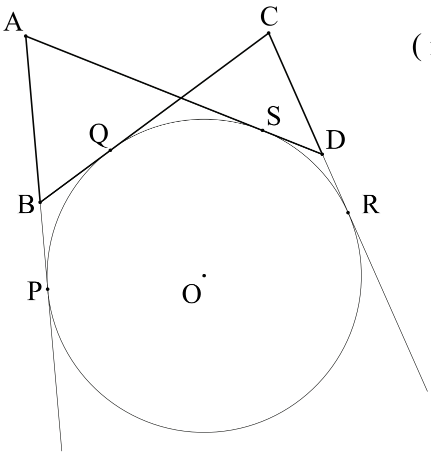

Ⅱ．（円に傍接する四辺形の性質）

（補助定理Ⅱ）

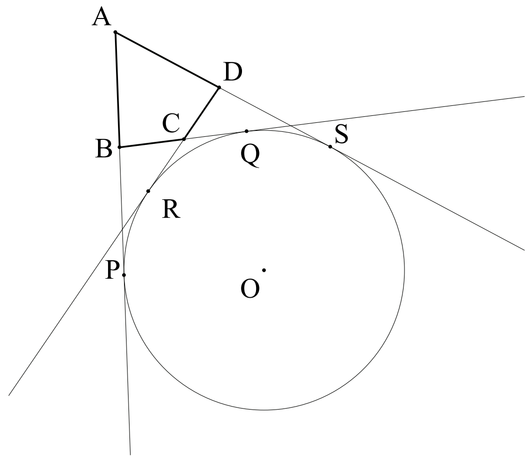
四辺形 ABCD がひとつの円に傍接するための必要十分条件は，隣り合った２組の辺の長さの和が等しいことである。すなわち，

$$\mathrm{AB}+\mathrm{BC}=\mathrm{CD}+\mathrm{DA} \quad \text{もしくは，} \quad \mathrm{BC}+\mathrm{CD}=\mathrm{DA}+\mathrm{AB}$$

( i )



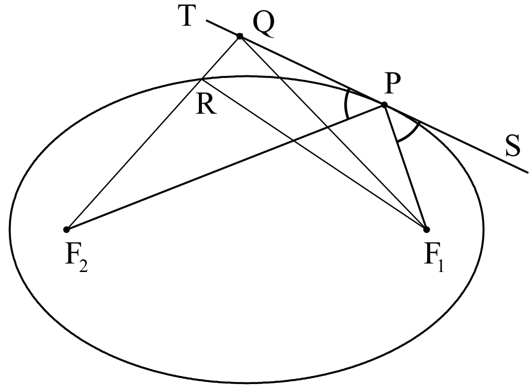

( ii )




上左図では，$\mathrm{AB}+\mathrm{BC}=(\mathrm{AP}-\mathrm{BP})+(\mathrm{BQ}+\mathrm{CQ})$

$$=\mathrm{AP}+\mathrm{CQ}$$
$$=\mathrm{AS}+\mathrm{CR}$$
$$=(\mathrm{AD}-\mathrm{DS})+(\mathrm{DR}+\mathrm{DC})$$
$$=\mathrm{AD}+\mathrm{DC}$$

### Ⅲ.（楕円の接線の性質）




楕円上の点 P における接線 ST をひくと，

$$\angle F_1PS = \angle F_2PT$$

が成り立つ。（点 $F_1$ , $F_2$ は焦点）

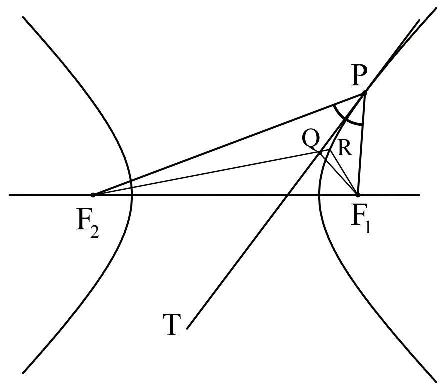
＜証　明＞

接線上の（点 P と異なる）任意の点を Q，線分 $QF_2$ が楕円と交わる点を R とすると，

$$QF_1 + QF_2 = QF_1 + QR + RF_2 > RF_1 + RF_2 = PF_1 + PF_2$$

これは，「点 Q が接線 ST 上を動くとき， ２点 $F_1$ , $F_2$ からの距離の和 $QF_1 + QF_2$ を最小にする点は，接点 P である」ことを示している。このことから， $\angle F_1PS = \angle F_2PT$ は成り立つ。

### Ⅳ.（双曲線の接線の性質）




双曲線上の点 P における接線 PT をひくと，

$$\angle F_1PT = \angle F_2PT$$

が成り立つ。（点 $F_1$ , $F_2$ は焦点）

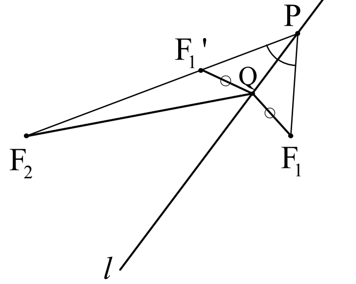
＜証　明＞

接線上の（点 P と異なる）任意の点を Q，半直線 $F_2Q$ が双曲線 と交わる点を R とすると，

$$QF_2 - QF_1 = RF_2 - RQ - QF_1 = RF_2 - (RQ + QF_1) < RF_2 - RF_1 = PF_2 - PF_1$$

これは，「点 Q が直線 ST 上を動くとき， ２点 $F_1$ , $F_2$ からの距離の差 $QF_2 - QF_1$ を最大にする点は，接点 P である」ことを示している。このことから，$\angle F_1PT = \angle F_2PT$ は成り立つ。

### 補足（距離の差 $QF_2 - QF_1$ を最大にする点）




直線 $l$ に関する点 $F_1$ の対称点を $F_1'$ とすると，

$$QF_2 - QF_1 = QF_2 - QF_1' \leqq F_2F_1'$$

より，点 Q が直線 $F_2F_1'$と直線 $l$ の交点（図の点 P）にあるとき，$QF_2 - QF_1$ は最大になる。