数学科指導案「条件を満たす点の動く範囲」

―ベクトルの１次結合と斜交座標―

大阪教育大学附属高等学校池田校舎

友 田 勝 久

【要　旨】

ベクトルの１次結合 $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ ……（＊）で与えられる点 P について，係数 s, t の条件と点 P が表す図形の関係を扱う。この図形描画の本質は斜交座標であり，点 P はデカルト座標における点 (s,t) を通じて調べることができることを理解させたい。高度な問題であるので，性急に結論だけを説明しても納得できるものではない。多くの作業と試行錯誤を通じて学ばせるよう工夫を凝らした。

また，本時ではグループ学習の形態をとり，思考の補助として，グループに１台のタブレットとソフトウェア GRAPES を使用する。「学び合い」「教え合い」，そして ICT の活用によって，新たな発見がなされることをひそかに期待するものである。

キーワード：ベクトル　一次結合　斜交座標　GRAPES　グループ学習

１．対　象　　高校２年生４組（41 名）

２．日　時　　2015 年 11 月 21 日

３．授業のねらい

ベクトルを用いて，直線や曲線を表したものをベクトル方程式という。直線や曲線の方程式は数学Ⅱの「図形と方程式」でも扱っているが，ここではそれらの図形が位置ベクトル，１次結合，内積，ノルムといった道具を用いて表現される。そして，その表現方法は図形と方程式で学んだことと密接な関係がある。これはベクトルによる既習事項の再構築である。

本時では，ベクトルの１次結合 $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$……（＊）で与えられる点 P について，係数 s，t の条件と点 P が表す図形の関係を扱う。

この図形を求めるには，２点を結ぶ線分のベクトル方程式を利用することが多いが，（＊）は s, t を媒介変数とする図形を表すこと，さらには，（＊）の本質は斜交座標であり，点 P はデカルト座標における点 (s,t) を通じて調べることができることを理解させたい。

４．単元の目標

ベクトルの諸概念を活用することで，直線や円などの図形をベクトルで扱えること，および，その表現と座標を用いた表現との関連を理解する。

本時の授業では，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で与えられる点 P について，次の２点を目標としている。

・係数 s, t の条件によって点 P がどのような図形を描くかを求めることができる。

・斜交座標の考えを理解する。

４．指導計画

第１次　直線のベクトル方程式（３時間）

第２次　条件を満たす点の動く範囲（１時間：本時）

第３次　円のベクトル方程式（１時間）

５．準備物

パソコン　教師用１台＋生徒用 10 台

（1 台／グループ），電子黒板

ソフトウェア（GRAPES および GRAPES ファイル「１次結合.gps」）（資料４参照）

生徒プリント（A4×2 枚）（資料１参照）

６．本時の授業展開　（資料２に授業の様子の記録あり）

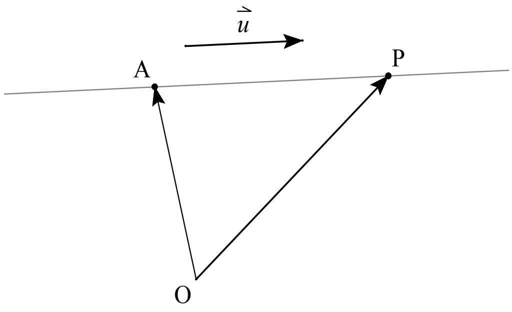
学習過程	学習活動および内容	指導上の留意点	評価の観点
導入	２点を通る直線が， $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$（$s+t=1$） で表されることを確認する。 また，ベクトルの１次結合について説明する。	２点を通る直線は，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の形から説明する。 本時の出発点となる知識の再確認である。	基本事項を覚えているか。
展開1	$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ について，s, t の値が具体的に与えられた時の P の位置をプリントに記入させる。	PC の利用方法とメッシュが書かれたプリントの利用方法を説明（資料２(1)）	斜めの目盛りを効果的に利用できるか。
展開2	$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ について，s, t の１次方程式 $s+t=3$ について，描く図形を予想させ発表させる。（資料２(2)，資料３の図１）	タイミングを見て，GRAPES で基本図形 P の式を $(3-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と書き換えるとよいことを教える。	意欲的に取り組めるか。考えたことを筋道立てて説明できるか。
展開3	上記について，予想の証明を考えさせ，発表させる。	各班がどのような説明を準備するか。必要に応じて，助言を与える。	既習事項を新たな問題に適用できるか。 考えたことを筋道立てて説明できるか。
展開4	２枚目のプリントを配布し，同種類の問題で，確認させる。	理解できていない生徒のフォロー	理解し自分のものにできているか。
展開5	$s+t=3$ について，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を変化させた場合に，なにが見えてくるか，調べさせる。（資料３の図２）	点 A,B をドラッグできるように変更する。（生徒に伝える）（資料２(3)） 生徒の発見をうまく発展させて，斜交座標を導きたい。	新しい概念を理解できるか。
まとめ	デカルト座標系が斜交座標系のひとつの場合であることを，基底ベクトルを連続的に変化させることで確認する。（資料２(4)）	時間の余裕があれば確認問題などを解かせてみたい。	新たな考えを理解し，既存の知識との関連を構築できるか

（資料１）生徒プリント２枚（朱字の部分は消して配布）

ベクトル方程式の応用（$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ が表す図形）

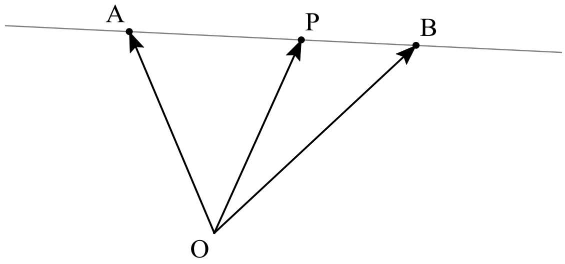
■　復習　ベクトル方程式

◆　点 A を通り，方向ベクトル $\vec{u}$ の直線



$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\vec{u}$

◆　２点 A , B を通る直線



$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$　（$s+t=1$）

P が線分 AB 上にある条件は，$s\geqq 0$, $t\geqq 0$

■　ベクトル（複数）の１次結合とは：ベクトルに係数をかけて加えたもの

◆　２つのベクトル $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ の１次結合は，　$s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$　の形で表される。

■　図の３点 O , A , B に対し，点 P が $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ で与えられている。s , t の条件によって点 P が示す図形（点，軌跡）がどのようになるかを調べてみよう。（図形を書き込みなさい）

☆　Warming up（点）

(1)　P_1 ： $(s,t)=(2,1)$

(2)　P_2 ： $(s,t)=(2,3)$

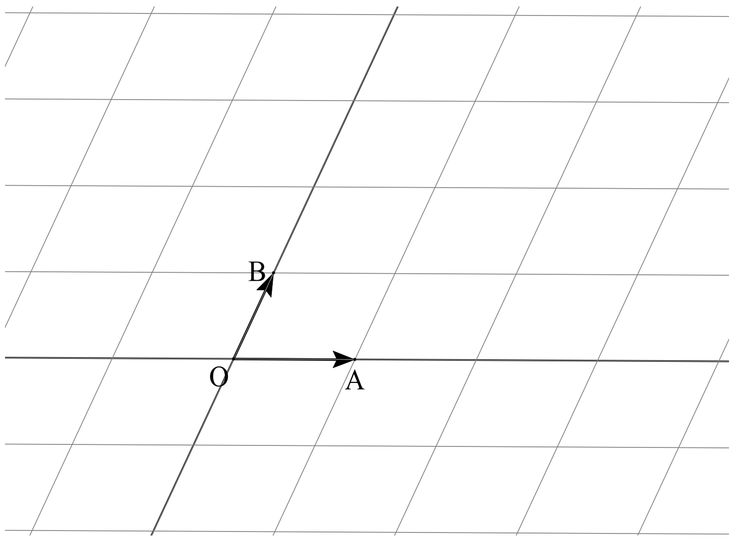
(3)　P_3 ： $(s,t)=(4,-1)$

(4)　P_4 ： $(s,t)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

★　初級問題（軌跡）

(1)　ℓ_1 ： $s+t=1$

(2)　ℓ_2 ： $s+t=3$



ℓ_2 ： $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$（$s+t=3$）について，なぜそのような図形になるのか説明を考えてみよう。

（考え方１）　$s=3-t$　より，$\overrightarrow{OP}=(3-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}=3\overrightarrow{OA}+t\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)=3\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$

$3\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA'}$　とするとき，点 P は A'を通り AB の平行な直線上を動く。

（考え方２）　$\frac{s}{3}+\frac{t}{3}=1$　より，$\frac{s}{3}=s'$，$\frac{t}{3}=t'$ とおくと，$s'+t'=1$　となる。

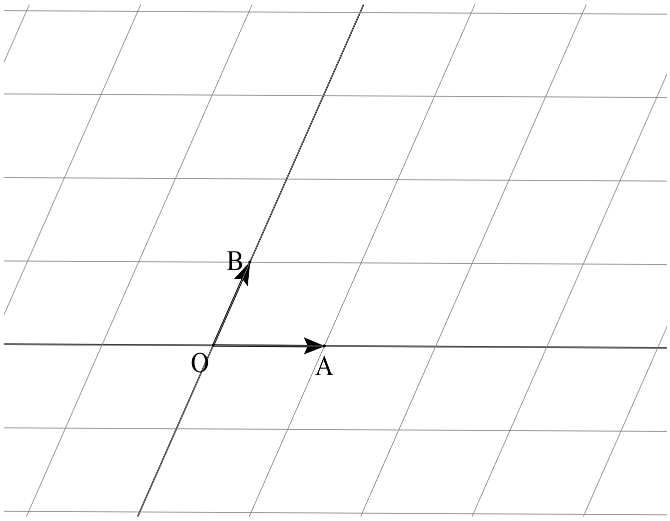
$\overrightarrow{OP}=s'\left(3\overrightarrow{OA}\right)+t'\left(3\overrightarrow{OB}\right)$　であるから，$3\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA'}$，$3\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB'}$　とすれば，点 P は直線 A'B'上を動く。

図の３点 O , A , B に対し，点 P が $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ で与えられている。s , t の条件によって点 P が示す図形（軌跡，領域）がどのようになるかを調べてみよう。(図形を書き込みなさい)

★★ 中級問題（軌跡）

(1) ℓ_3 ： $s+t=0$

(2) ℓ_4 ： $s+2t=4$



素早く簡単に描く方法はないのか？

点 A , B をドラッグして，

OA ⊥ OB， OA = OB となるようにすると，平行四辺形のメッシュは，直交座標のメッシュと同じになる。

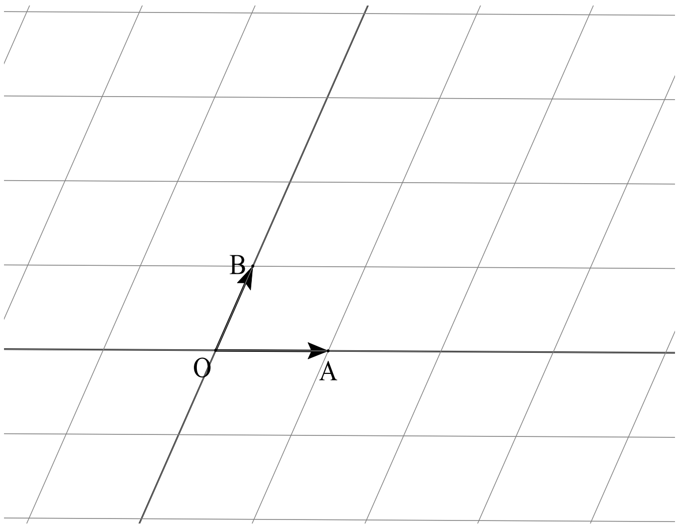
「直交座標で描いて，基底を変化させて斜交座標に変形する。」

★★★ 上級問題（軌跡，領域）

(1) ℓ_5 ： $2s-3t=6$

(2) D_1 ： $s+2t\leqq 4$

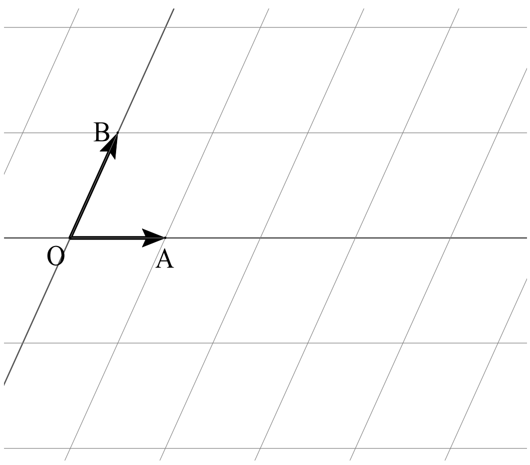
(3) D_2 ： $s\geqq 0$， $t\geqq 0$， $s+t\leqq 1$



★★ おまけ ★★

(1) D_3 ： $0\leqq s\leqq 1$， $0\leqq t\leqq 1$

(2) ℓ_6 ： $s=t^2$



（資料２）授業中の様子

(１) ４人で１台のタブレットを囲んでいます。
寝かせて使った場合，情報を共有しやすい利点がありますが，窓や天井からの光の写り込みがあるためやや見づらくなります。

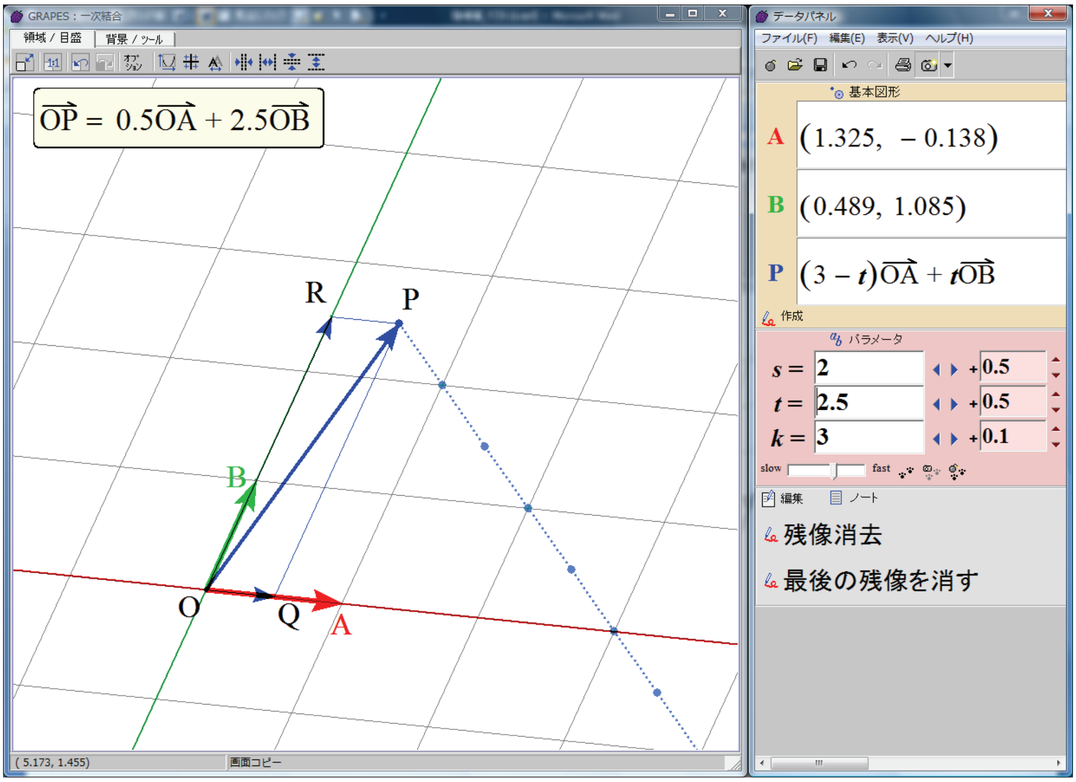
(２) 電子黒板を使って生徒が発表しているところです。
直接書き込めるというのは，授業を展開する上で重要なことです。

(3) 教室全体の様子です。
この日は研究授業で多くの見学者がいました。が，生徒は慣れたもので，リラックスしている様子が伺えます。さすが附属生です。

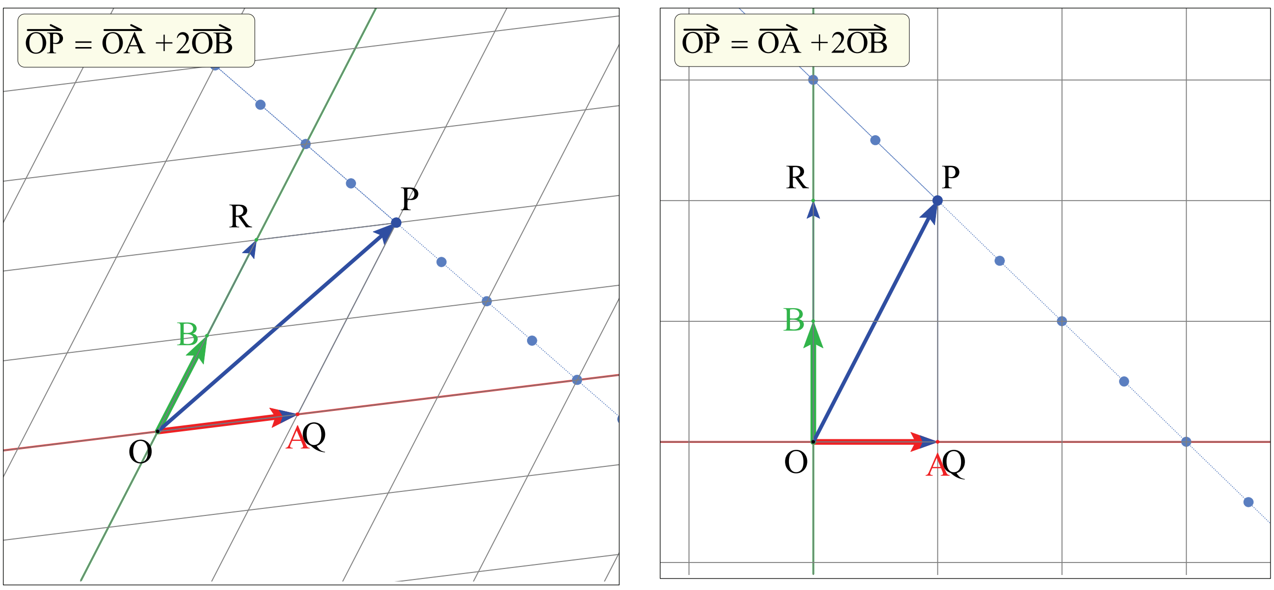
(4) 授業最後の締めの部分です。
斜交座標と直交座標の説明をしています。途中，時間の配分を間違えたため，とてもあせっている様子が伺えます。

（資料３）　ソフトウェアの動作中の様子

（図１）$s+t=3$　のときの軌跡の描画

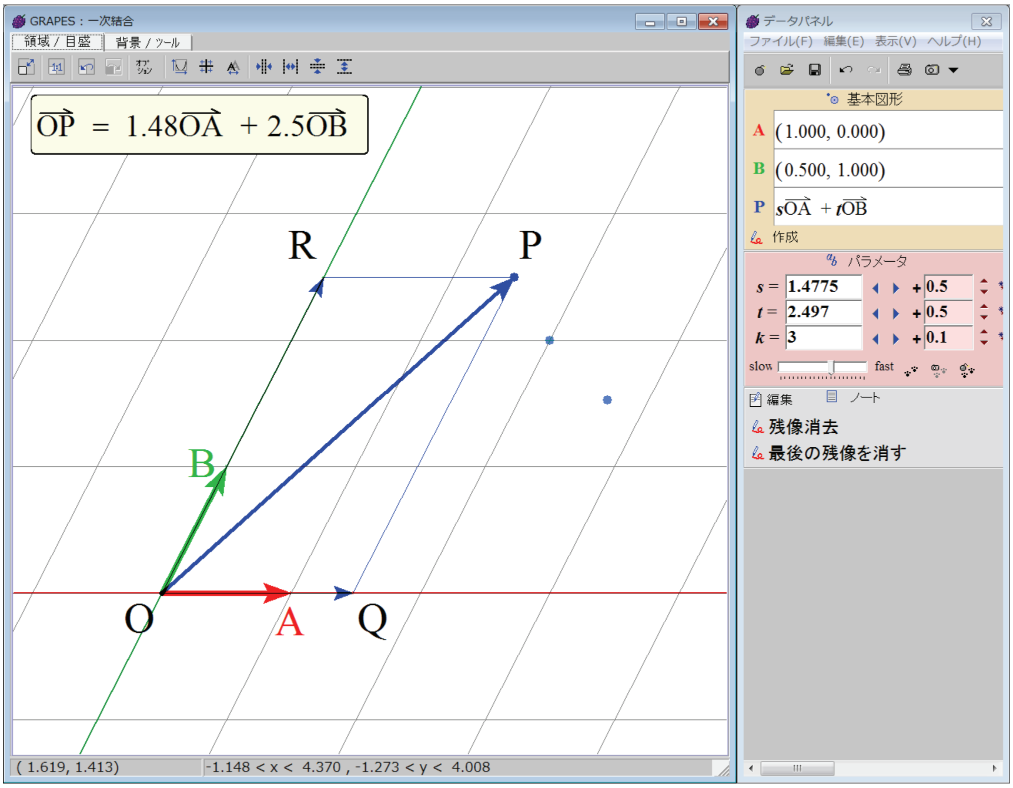


（図２）基底ベクトル$\overline{OA}$, $\overline{OB}$を変化させたときの様子



（資料４）　GRAPES ファイル「１次結合.gps」について

２つのベクトル $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ から，$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ を図示します。



ベクトルの係数は，s, t, k をパラメータとして含むものなら何でも構いません。

例１：$\overrightarrow{OP} = (3-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$

例２：$\overrightarrow{OP} = (3-t)\overrightarrow{OA} + 2s\overrightarrow{OB}$

ただ，授業の最初に $\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ を示すことが多いでしょうから，生徒が混乱するのを避ける意味で，上記の例１程度の変形にとどめておくのが無難でしょう。

「残像」について

パラメータ s, t, k を操作した時や，点 P をドラッグしてマウスボタンを離したとき，点 P の「残像」が残ります。「残像」は点 A や B の位置に変更を加えたとき（すなわち基底ベクトルに変更を加えたとき），「残像」の位置もそれに伴って変化します。

この「残像」は GRAPES が標準で持っている残像とは全く異なっていて，実態はテーブルを利用した点列です。したがってこれを消すには，残像消去ボタンではなく，ノートパネルに表示されているスクリプトボタン［残像消去］をクリックします。

点 A, B のドラッグ（基底ベクトルの変更）

点 A, B のプロパティを開き，「ドラッグ」をチェックすることで，２点 A, B をドラッグできるようになります。これらの点をドラッグして基底ベクトル $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ に変更を加えると，描いた図形全体が変化します。